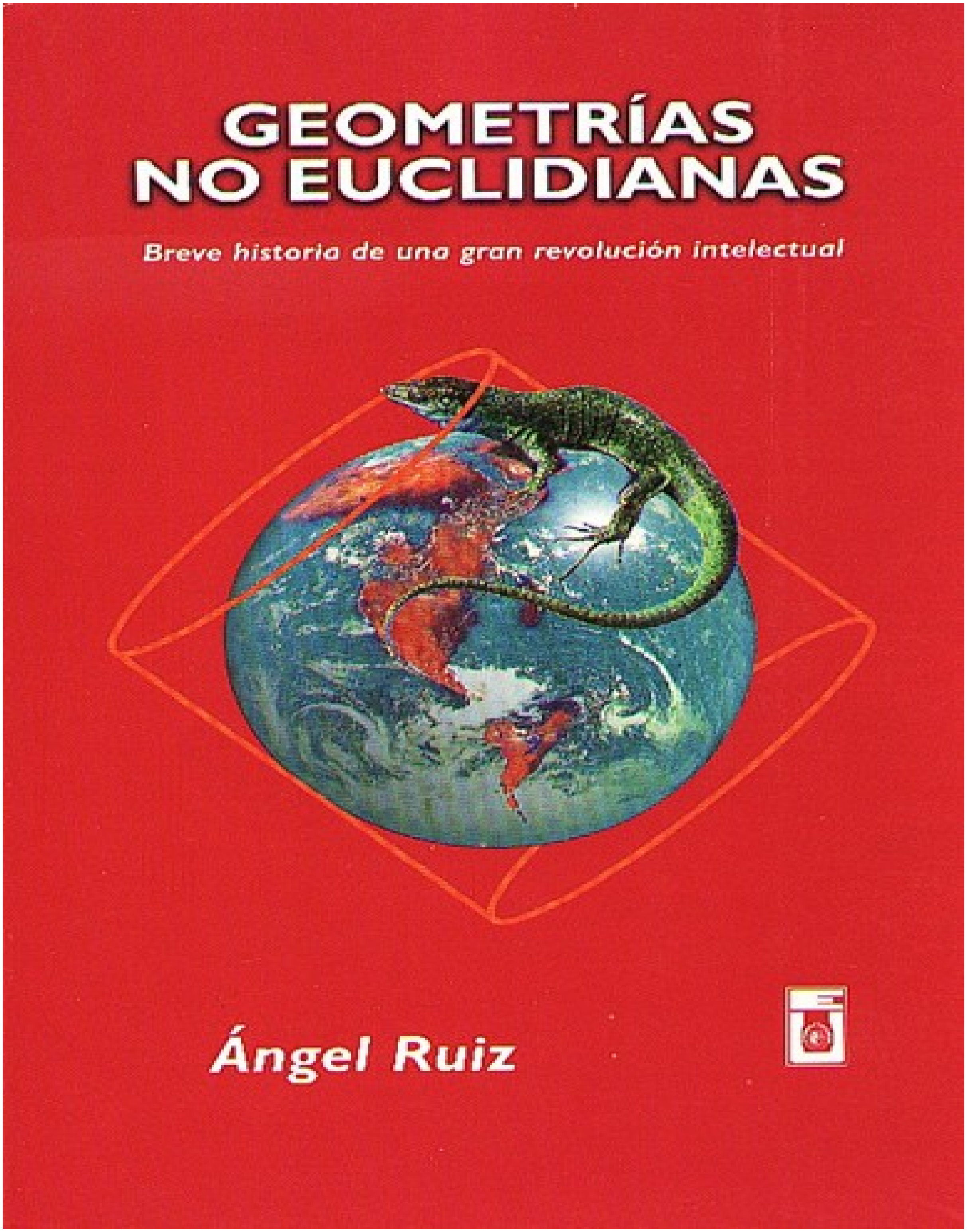


Editorial de la Universidad de Costa Rica
Primera edición, 1999

ÍNDICE

PREFACIO

Uno puede interpretar la geometría como un juego. Todo juego posee reglas. ¿Cuáles son las reglas del juego geo-mé-trico? Podemos decir que las reglas de éste juego son dadas por los postulados y axiomas, es decir por las suposiciones más básicas y los procedimientos y acciones permitidas.

En el fútbol, por ejemplo, se tiene 11 jugadores en cada equipo, dos porterías, algunos jugadores pueden tocar la bola con sus manos y otros no, también depende de ciertas condiciones cuándo se vale tocar la bola con la mano. A veces el árbitro pita por ejemplo "fuera de juego" y se sabe que es porque se transgredió una regla.

Pues lo mismo sucede en la geometría. La geometría común que usted, estimado lector, conoce se llama euclidiana. Posee reglas muy precisas. Y lo usual es que las haya conocido y estudiado durante muchos años de su vida.

Se puede pensar qué pasaría si se cambia algunas de las reglas del fútbol. Por ejemplo, que todos los jugadores puedan tocar la bola con sus manos en cualquier lugar de la cancha, o que solamente se pueda usar el pie derecho y no el izquierdo. Evidentemente, el nuevo juego tendría algo de parecido con el fútbol pero ya no sería el mismo. Más parecería balonmano o rugby.

Ahora ¿qué pasaría si cambia algunas de esa reglas de la geometría? Es este el tipo de asuntos que vamos a tratar en este capítulo. Porque, precisamente, podríamos decir que las geometrías no euclidianas respresentan un cambio de algunas de esas reglas. El nuevo juego resulta diferente pero también contiene cosas similares.

En lo que sigue, vamos a conocer algunas de las geometrías que se generaron al cambiar algunos de los postulados clásicos de Euclides. Este no fue un proceso sencillo y fácil porque la geometría euclidiana ha estado asociada a lo que se ha creído es el espacio que nos rodea. Y cambiar una geometría así rompía y todavía rompe muchos de los esquemas mentales e ideas que poseemos.

Su historia es la historia de una de las más grandes revoluciones del pensamiento humano. Es apasionante. Debería recordarse como se recuerda la Revolución Francesa o el descubrimiento de América, y sin embargo la realidad es que pocas personas saben que existió esta revolución.

Este libro constituye esencialmente una reseña histórica e introductoria de las geometrías no euclidianas, pero también hemos querido dotarlo de algunos ejemplos o representaciones físicas (o visualizables) de las mismas. La primera parte está constotuida por cuatro capítulos. El primer capítulo nos ofrece un recuento breve de los postulados y axiomas de la geometría euclidiana. El segundo capítulo recorre la historia del famoso quinto postulado, cuya negación fue responsable de la generación de las geometrías no euclidianas. En el tercer capítulo resumimos la obra de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, los padres de este tipo de geometrías. En el capítulo cuarto describimos la evolución de las geometrías no euclidianas y especialmente dentro del marco de la geometría diferencial. Los capítulos quinto y sexto, que constituyen la segunda parte del libro, ofrecen representaciones visuales y físicas de las nuevas geometrías.

Este libro busca llenar una necesidad cultural y educativa en torno a la geometría y las matemáticas. Por sus características la geometría no euclidiana permite avanzar en la comprensión de la naturaleza de las matemáticas; en particular el sentido que en esta disciplina poseen las premisas, los axiomas, y la lógica. Pero, más importante, la historia de estas geometrías ofrece un ejemplo de cómo funciona la construcción matemática en la realidad, en donde las condiciones sociales, históricas e individuales ocupan un papel trascendental.

Para terminar este prefacio, deseo expresar mi agradecimiento a la Editorial de la Universidad de Costa Rica por su apoyo para la publicación de este libro.

Angel Ruiz

Catedrático

Escuela de Matemática

Universidad de Costa Rica

9 de setiembre de 1997.

Capítulo I: UNA INTRODUCCIÓN

Al describir la historia de las matemáticas lo adecuado sería ofrecer una visión integral que incorporara las contribuciones matemáticas de otras culturas importantes además de la occidental; sin embargo, no es éste nuestro propósito en la presente reseña orientada a la comprensión de la creación de las geometrías no euclidianas. Así pues, vamos a comenzar este libro con el establecimiento de una periodización histórica, en general en concordancia con la historia de la sociedad occidental.

- Una primera etapa podemos decir que fue la greco-romana, donde la fase griega fue más sustantiva y significativa para las ciencias y las matemáticas.
- Una segunda etapa: la época medieval, dominada esencialmente por una atmósfera cultural poco propicia para el progreso de las ciencias y, por ende, un escaso desarrollo social y científico.
- Una tercera etapa: el Renacimiento, donde lo fundamental fue un cambio de actitud frente al conocimiento y frente a la vida.
- Una cuarta etapa fue la Revolución Científica en el siglo XVII y, si se quiere, parte del siglo XVIII.
- Podemos decir que una quinta etapa la constituye el trabajo realizado por los matemáticos del siglo XVIII y parte del XIX, cuya característica esencial fue el desarrollo de los temas y métodos matemáticos generados en la revolución matemática y científica del XVII, con especial énfasis en trabajos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral.
- Una sexta etapa se desarrolla en el siglo XIX, donde los elementos significativos fueron el desarrollo del álgebra y en particular de la teoría de grupos, la geometría proyectiva, las geometrías no euclidianas y la rigorización del análisis y las matemáticas en general.

Se puede decir que en algún momento en esta última etapa emerge la matemática moderna que llega hasta nuestros días. Es una decisión algo convencional el establecer los límites finales de una sexta etapa y el inicio de una sétima, con toda precisión, porque las principales tendencias que todavía dominan las matemáticas, de alguna forma, fueron planteadas y desarrolladas durante el mismo siglo XIX.

En este capítulo no ponemos énfasis en los resultados propiamente matemáticos sino, más bien, en lo aspectos históricos generales que nos permitan ubicar el trabajo de los matemáticos. Es decir, no hay detalles matemáticos solo descripción de fases y características históricas globales de interés especial para la comprensión del lugar intelectual que ocupan las geometrías no euclidianas.

1.1 EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

Los primeros desarrollos de la geometría y, en general, de las matemáticas podemos decir que se encuentran alrededor de la cultura helénica, en la Grecia Antigua. Esta cultura fue una base esencial de la civilización occidental.

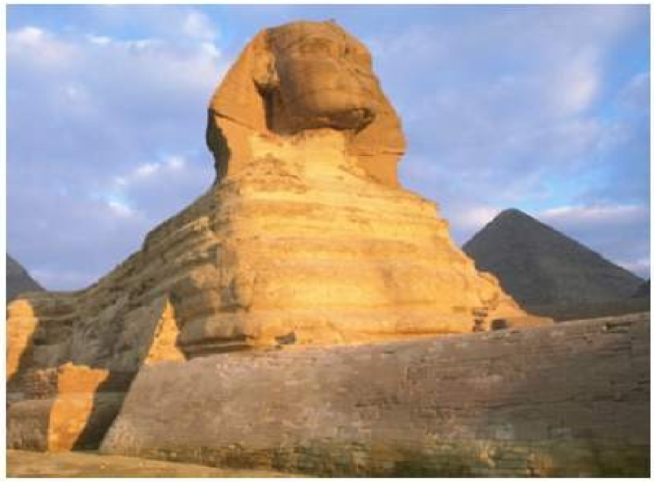
Thales y Pitágoras

Los primeros nombres de matemáticos que vienen a nuestra mente son los de Thales de Mileto (circa 625-545 a.C.) y Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.c.), aunque no se sabe con exactitud cuáles son los resultados matemáticos que realmente obtuvieron. Probablemente, y a diferencia de otras obras como las de Platón (c. 429.348 a.C.) o Herodoto, no existen obras específicas que nos den certeza sobre sus trabajos y resultados.

En el caso de Pitágoras, que estableció una escuela científica y religiosa, ni siquiera se puede decir si los resultados que se le atribuyen son suyos o de sus discípulos y correligionarios.

En general, con relación a todas las obras de la Antigüedad Clásica es muy difícil saber con precisión el de-sarrollo histórico y las características específicas del mismo pues mucho se ha perdido a lo largo de tantos siglos. No obstante, podemos establecer algunas ideas y concensos en torno a este momento de las matemáticas griegas.

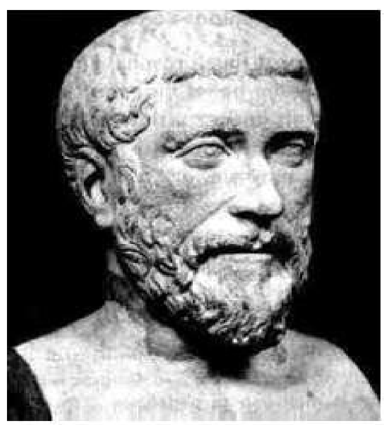
Un primer detalle: tanto Thales como Pitágoras tuvieron influencia de las civilizaciones del bronce, grandes culturas que dominaron el mundo conocido durante muchos siglos. Es Thales quien se supone que inició la geometría deductiva, y a quien se le atribuye el teorema de que un ángulo inscrito en una circunferencia es recto, y, también, que el círculo es dividido en dos partes iguales por un diámetro.



Egipto: una de las civilizaciones del Bronce

Podemos recordar que Thales fue miembro de una famosa escuela de pensadores que trataron de ofrecer una interpretación naturalista sobre la realidad, la Escuela Jónica. Se asegura que esta escuela constituye el primer eslabón en el desenvolvimiento de la cultura griega.

Los pitagóricos establecieron una doctrina importante sobre la naturaleza de los números: ellos consideraban a los números como el fundamento del universo; les daban a los números un significado abstracto. Para Pitágoras, cada cosa es un número específico y, por supuesto, diferentes cosas son representadas por diferentes números.



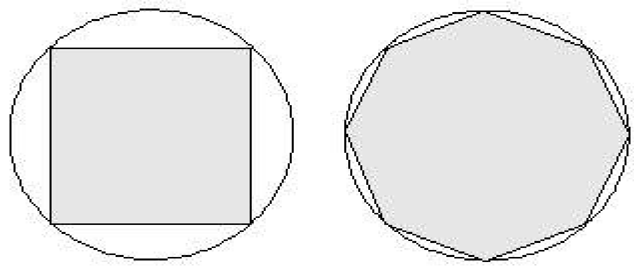
Pitágoras

Periodo Alejandrino

Una nueva época en la civilización griega comenzó a partir de la conquista realizada por los macedonios, un pueblo del norte de Grecia; se dice que los macedonios destruyeron la civilización griega clásica y generaron la apertura de una nueva fase en la historia griega. La conquista macedonia comenzó con Filipo II alrededor del año 352 a.C., de hecho Atenas fue derrotada en el 338 a.C.; sin embargo, quien más huella dejaría en la historia de la humanidad fue Alejandro El

Grande, precisamente hijo de Filipo. Alejandro conquistó Grecia, el Cercano Oriente, Egipto y llegó hasta la India; sin embargo, murió muy pronto y su gran imperio se dividió en tres partes. Una de las partes que más importancia tendría para el desarrollo de Occidente y, en particular, de las ciencias, las técnicas y la matemática, fue el llamado Imperio de los Ptolomeos, cuya ciudad más importante llevó el nombre de Alejandría.

EL MÉTODO DE EXHAUSCIÓN

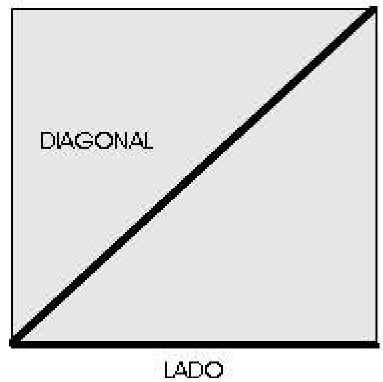


EL ÁREA DEL CÍRCULO SE APROXIMA CON POLÍGONOS REGULARES CON CADA VEZ MÁS LADOS

Eudoxo

Antes de la nueva fase alejandrina, debemos mencionar el trabajo de Eudoxo (c.408-355 a.C.) que nació en Cnido alrededor del año 408 a.C. Este fue uno de los matemáticos más importantes de toda la cultura griega. Eudoxo se supone fue discípulo de Arquitas (fl.c.400-360 a.C.), en Tarento; y también formó parte de la Academia de Platón. Es muy conocido por haber desarrollado el llamado método de exhausción , para aproximar áreas geométricas.

Es interesante mencionar que Eudoxo evitó considerar los números irracionales como números; evitó dar valores numéricos a longitudes de segmentos de recta, tamaño de ángulos y a otras magnitudes así como las razones entre ellas. Esto implicó una drástica separación entre geometría y aritmética, y un cambio en la orientación anterior que daba un énfasis al número como concepto central (visión pitagórica).



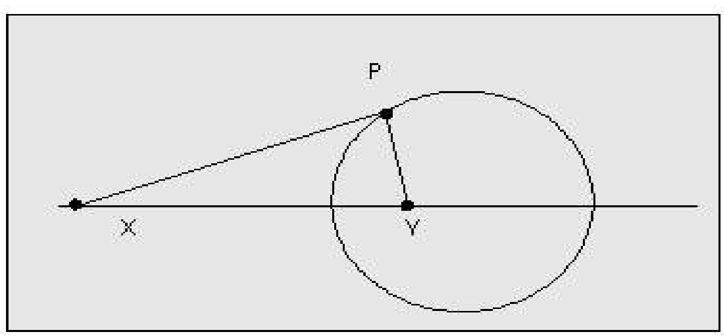
LA RAZÓN ENTRE LA DIAGONAL DEL CUADRADO Y SU LADO ES INCONMENSURABLE: UN NÚMERO IRRACIONAL

Euclides y Apolonio

Ya en pleno período alejandrino, se suele citar los nombres de Euclides (fl.c.300 a. C.) y de Apolonio de Perga (c.262-190 a.C.), aunque el trabajo de Apolonio se dice que posee el espíritu del período anterior.

Euclides es bien conocido por un famoso libro llamado Elementos, cuya influencia en la historia ha sido extraordinaria, precisamente porque sintetizó, resumió y sistematizó todo el conocimiento matemático previo y, en particular, a través de un método que echaba mano de la lógica: la axiomática. Ya hablaremos de Euclides en los siguientes capítulos. Ahora solo nos interesa colocar su contribución en el marco histórico que describimos.

DEFINICIÓN DE CÍRCULO SEGÚN APOLONIO



XP/YP = 3

Conjunto de puntos cuya distancia de un punto fijo es un múltiplo de su distancia de otro punto fijo

Arquímedes

La figura matemática más importante de toda la época podemos decir que fue Arquímedes (c.287-212 a.C.), quien estudió en Alejandría; aquel centro del Imperio de los Ptolomeos que fue una base para la cultura y el aprendizaje en el mundo griego.

Además del cálculo de áreas y volúmenes, aproximó el número π, y obtuvo grandes resultados en hidrostática, astronomía, y mecánica.

Se afirma que tuvo relación con discípulos de Euclides precisamente en Alejandría y algunos de los detalles de su vida son conocidos por medio de una historia escrita por el famoso Plutarco, 45-120 d.C., (Vidas paralelas: Marcellus), acerca de un general romano llamado Marcelo.

Arquímedes

Algunas características de la época

Por razones que no vamos a desarrollar aquí, la matemática griega, a pesar de su grandeza, tuvo importantes limitaciones: poca relevancia del álgebra y la aritmética (podemos decir que existió un exceso de geometrización de las matemáticas) y una geometría limitada por reglas muy rígidas desprendidas de la construcción exclusiva con regla y compás.

Se afirma que pesó en todo esto el descubrimiento de los números irracionales, que enfrentaron la visión dominante pitagórica que afirmaba a los números enteros y racionales como fundamento del universo.

Otros asuntos como las paradojas de Zenón (c. 450 a.C.) también jugaron un papel en las características específicas de las matemáticas griegas.

La muerte de Arquímedes por un soldado romano

Los romanos

Por diversas razones, el mundo griego fue derrotado por Roma y se creó una nueva fase en el Mediterráneo gobernada por la influencia de los habitantes de la Península Italiana.

Los romanos dejaron su impronta en la historia occidental, pero, en pocos siglos, a eso del V siglo D.C., habían entrado en una plena decadencia.

Durante la época romana si bien se dieron progresos con relación a la organización política y jurídica, a los medios de transporte y distribución, para la cultura no representó una gran victoria: los trabajos en ciencias, matemáticas y en técnicas fueron prácticamente congelados; es decir: un gran retroceso durante siglos para el desarrollo del conocimiento.

1.2 EN LA EDAD MEDIA

Se suele considerar la Caída de Roma en el año 476 como el inicio de la Edad Media, y el año 1453, con la Caída de Constantinopla en manos turcas, su final. Se trata de una demarcación en esencia política.;, para la historia de las matemáticas o de la ciencia en general otras fechas sería mejores, pero vamos a seguir la división clásica por propósitos didácticos.

China: una cultura que contribuyó a las matemáticas medievales

Es necesario, sin embargo, hacer una advertencia: el grueso de la historia de las matemáticas medievales no fue exclusividad europea; más bien fue el resultado de varias civilizaciones: árabe, india, china, bizantina (Imperio Romano de Oriente) y lo que quedaba del Imperio Romano de Occidente. Cada civilización poseía diferentes lenguas. No vamos en este pequeño libro a analizar más que una de esas culturas, pero nos interesa resaltar el marco global diverso de esta evolución histórica. Esto es importante porque para muchos asuntos de esta época la mejor comprensión se logra solo si se estudian los contactos e interrelaciones culturales que existieron.

Alrededor del siglo XII y siglos previos la sociedad europea fue esencialmente una colección de pueblos aislados y de poco nivel cultural, con la Iglesia Católica como albacea intelectual. Culturalmente durante todo este período no existió mucha relación con la mayor parte del pensamiento clásico griego, distancia que ya se había establecido desde el mismo Imperio Romano.

El Taj Mahal, del periodo indoislámico, se empezó a construir en 1628

Durante siglos, la enseñanza, el aprendizaje, el conocimiento escaso que se había rescatado de las culturas griega y romana, estuvieron asociados a la Iglesia Católica y, sobre todo, a las necesidades que ella tenía (como, por ejemplo, en los servicios religiosos y la lectura de los libros sagrados). El latín fue escogido como idioma oficial de la Iglesia, por eso durante todo este período en la enseñanza como en el intercambio de conocimiento fue el latín la lengua que se usó.

Debe decirse que en toda esta época no había mucha matemática disponible, aunque en el currículo educativo para las pocas escuelas que hubo se le dio cierto énfasis a las matemáticas. Por ejemplo, el modelo educativo estaba formado por lo que se llama el cuadrivium y el trivium. El primero estaba constituido por geometría, aritmética, astronomía y música. El trivium: por retórica, gramática y dialéctica . Sin embargo, como hemos dicho, el nivel matemático era bajo, apenas una aritmética y una geometría muy elementales.

La razón fundamental del bajo nivel de las matemáticas y la ciencia era la ausencia de factores que estimularan el de-sarrollo del conocimiento. Para la Iglesia de esos tiempos la verdad y las fuentes y criterios de la misma sólo se encontraban en la revelación divina, y los estudios tenían que orientarse hacia la lectura y análisis de los textos sagrados, donde se suponía se encontraban la verdad y el conocimiento. En ese sentido, métodos empíricos o experimentales estaban prácticamente excluidos para la investigación del mundo circundante.

Como los temas principales de reflexión y análisis eran el pecado, el temor al infierno, la salvación o cómo ascender al cielo, el estudio del mundo físico real no solo se consideraba fuera de los fines de la educación y el conocimiento por parte de la Iglesia, sino que, muchas veces, era considerado algo estéril y, en ocasiones, hasta herético.

Debe advertirse que el término "Edad Media" convoca en realidad diferentes periodos históricos, circunstancias culturales heterogéneas, y resultados históricos que sería mejor separar o distinguir. Hubo auténticas etapas "oscuras" cultural y socialmente, y otras con importantes realizaciones espirituales; hubo regiones cultas y otras muy atrasadas. Cohabitaron diferentes sistemas económicos, políticos y sociales y puede decirse que toda la época estuvo llena de importantes contradicciones culturales. Al igual que dominó un contexto nada propicio para las ciencias y las matemáticas -como ya señalamos-, de la Edad Media son las primeras universidades "modernas", desarrollos urbanos novedosos, el progreso de métodos y técnicas agrícolas, y de transporte, etc. Nos resulta más apropiado, entonces, un enfoque "prudente" que parta de esta diversidad y que señale algunas tendencias importantes en su devenir social y cultural.

El "regreso" de los griegos

La forma de vida que dominó durante todos estos siglos, empezó a sentirse afectado alrededor del siglo XII por el descubrimiento por parte de los europeos de las grandes contribuciones en ciencias, matemáticas, literatura y arte, realizados en la Grecia Antigua. Fue a través del comercio y diversos tipos de viajes que tomaron contacto con obras que habían sido conservadas, traducidas e incluso ampliadas por los árabes.

Los trabajos de la Antigüedad griega fueron retomados por los intelectuales europeos y religiosos de la época, creando lo que se suele llamar la Escolástica; en síntesis podemos decir que se trató de establecer una unidad entre el pensamiento del gran filósofo de la Antigüedad Aristóteles (c.384-322 a.C.), y las ideas y doctrinas de la Iglesia Católica. A pesar de la vinculación con el pensamiento griego antiguo y los resultados de aquella gran cultura, los dirigentes espirituales de la época no pusieron sus énfasis en los aspectos naturalistas o más relacionados con la indagación empírica, sino en los aspectos, digamos, más metafísicos: en la lógica y en las premisas cosmológicas que menos entraban en contradicción con los dogmas establecidos. Por eso, a pesar de que se lograron algunos resultados de interés en ciencias y en matemáticas, éstos no fueron de una gran trascendencia. La situación sólo cambiaría bajo la acción de importantes transformaciones sociales, culturales y políticas que se suelen asociar con los términos de Renacimiento y, también, de Revolución Científica.

Alrededor de esta época se conocen algunos resultados matemáticos asociados a los nombres de Leonardo de Pisa (c. 1170-1250) y Nicole Oresme (c.1323-1382).

Los árabes

Antes de que hablemos un poco más del Renacimiento y de la Revolución Científica, expresemos algunas consideraciones sobre el influjo árabe en la historia del pensamiento occidental, el cual normalmente no es ampliamente divulgado en los libros de historia y los textos que usamos en nuestras escuelas primarias y secundarias.

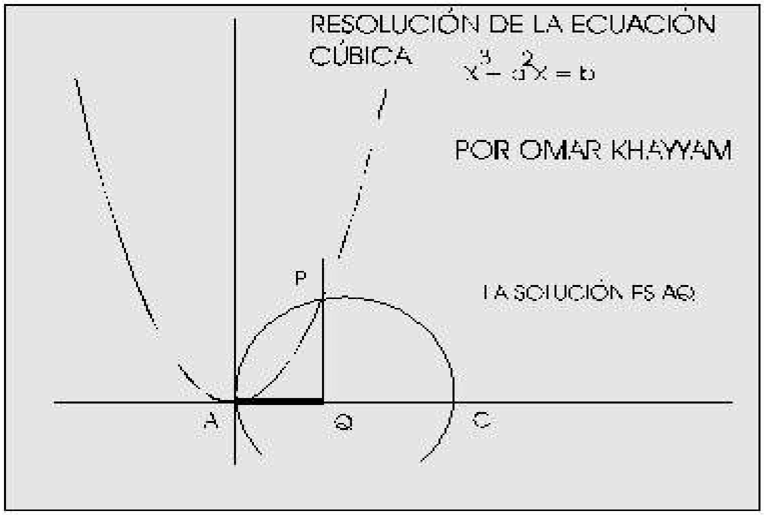
Los árabes eran un conjunto de pueblos nómadas que vivían en lo que hoy es la Península Arábiga, que bajo el liderazgo de un gran dirigente religioso llamado Mahoma constituyeron un extraordinario imperio en el Mediterráneo. En el año 632 d.C. el Imperio Arabe limitaba con la India y España, incluía el norte de Africa y el sur de Italia, mientras que Europa era apenas un grupo de pueblos esencialmente atrasados y aislados. Los árabes construyeron una extraordinaria civiliza-ción que cultivó ciencias, artes e incluso promovieron una atmósfera cultural, social y política bastante flexible y tolerante con relación a las religiones y a los pueblos alrededor del Mediterráneo. Los árabes, por lo menos hasta el siglo XV, constituyeron el principal centro de cultura, educación, y ciencias de toda la región. El fundamento básico de su desarrollo cultural estuvo asociado al conocimiento griego de la Antigüedad, a través directamente de fuentes griegas en versión siria o hebrea. Ellos habían tomado contacto con lo que quedó del mundo griego en Bizancio, lo que se suele llamar el Imperio Romano de Oriente, a la vez que de Egipto y escuelas sirias de Edessa, Damasco y Antioquía; aunque también tuvieron contacto con obras conservadas por los cristianos nestorianos en Edessa.

Al-Khoarizmi

Solo para mencionar un ejemplo, debemos decir que en el caso de las matemáticas su papel fue esencial por la relevancia que le dieron al álgebra y a la aritmética. Los griegos antiguos habían geometrizado el álgebra y la aritmética debido a los problemas que encontraron con los números irracionales y con algunas paradojas numéricas. Las debilidades griegas hicieron que se restringieran las posibilidades de desarrollo de la misma geometría; aunque los más afectados fueron el álgebra y la aritmética. Los árabes usaron a diestra y siniestra los números irracionales, al igual que los hindúes. La notación posicional en base 10 y los números negativos fueron introducidos en Europa por el influjo hindú y árabe.

Podemos citar el nombre de dos insignes matemáticos árabes que han quedado guardados en nuestra cultura: Mohamed ibn Al-Khoarizmi (c.825 d.C.) y Omar Khayyam (c.1038-1123).

La principal influencia árabe podemos decir que empezó a tener su impacto en el mundo europeo sobre todo a partir del mismo siglo XII, cuando representó ese extraordinario puente entre los intelectuales europeos y la Antigüedad griega. En muchas ocasiones, las primeras versiones que recibieron los europeos de los textos clásicos de la Antigüedad (tanto en matemáticas, medicina, química y otras áreas del conocimiento y las técnicas) fueron textos y obras traducidos por los islámicos al arábigo.



1.3 RENACIMIENTO Y REVOLUCIÓN CIENTÍFICA

El Renacimiento significó un reencuentro con la cultura clásica antigua; pero esta vez no fue con la lógica formal o la especulación abstracta y no empírica que habían realizado los escolásticos, sino con algo fundamental: la relación con el mundo y la indagación práctica de la naturaleza, el sentido vital, el humanismo. Fue una época en la que todo se cuestionó y, con ello, se abrió un período extraordinario en la producción intelectual y cultural de la sociedad occidental.

Detalle de La Escuela de Atenas de Rafael

Con el Renacimiento, que arrancó en Italia y luego se extendió por otras partes del suelo europeo, comenzó una verdadera revolución de ideas y una nueva actitud ante la sociedad, la naturaleza y el hombre; revolución que afirmamos constituye uno de los principales fundamentos del mundo moderno.

El reencuentro con la Antigüedad clásica fue importante, pero no fue el único factor que pesó; diversas condiciones económicas, políticas y sociales fueron un auténtico caldo de cultivo para poder potenciar los resultados cognoscitivos de la Antigüedad que "reentraban" en el mundo occidental.

Matemáticas renacentistas

El Renacimiento no produjo grandes resultados en matemáticas, lo que no era el caso en otras partes de la vida cultural, por ejemplo en la literatura y el arte. Pero la realidad es que en esta época se estaba logrando crear la infraestructura para dar el salto que se realizó en el siglo XVII y que podemos sintetizar con el nombre de Revolución Científica.

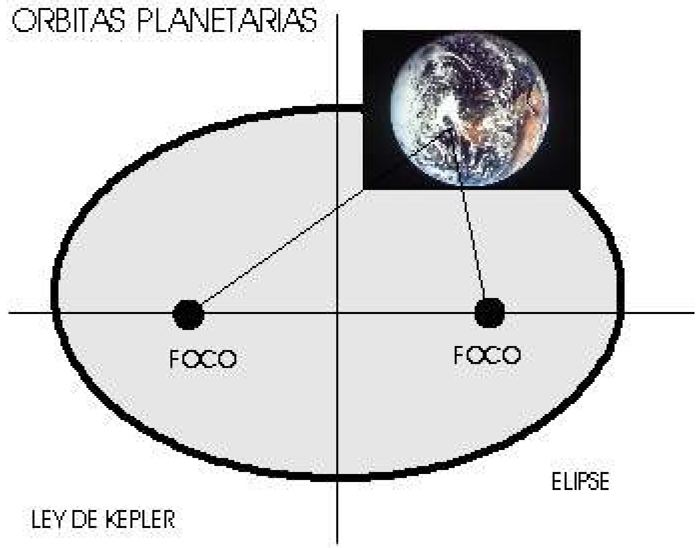
De esta época, vienen a nuestra mente los nombre de algunos matemáticos: Nicolás de Cusa (1401-1464), Regiomontano (1436-1476), Luca Pacioli (1445-1514). También es necesario mencionar que los importantes trabajos en el álgebra (que como veremos serían fundamentales en el nuevo periodo) estuvieron asociados a los italianos Hierónimo Cardano (1501-1576), y Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557). Otros matemáticos de la época fueron: Robert Recorde (1510-1558), Georg Rheticus (1514-1576), Pierre de la Ramée (1515-1572), Johannes Werner (1468-1522), Albrecht Dürer (1471-1528), Gerard Mercator (1512-1594) y Francesco Maurolico (1494-1575).

Las nuevas ideas

Los cambios que se dieron en este periodo de la historia fueron extraordinarios. En lo que se refiere a los métodos de la ciencia fueron de fundamental impacto las ideas de Francis Bacon (1561-1626), René Descartes (1596-1650) y de Galileo Galilei (1564-1642).

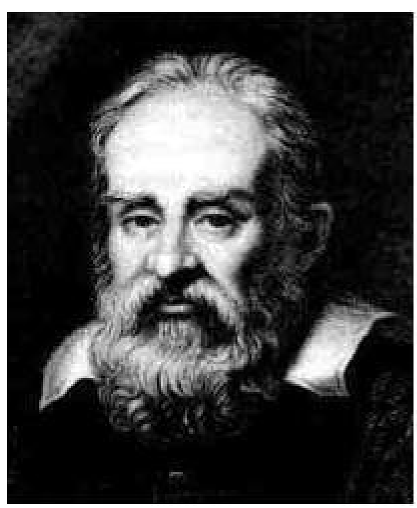
Con su trabajo se apoyó el desarrollo de los métodos experimentales y empíricos, y el uso de descripciones matemáticas y mecánicas en la comprensión de la naturaleza.

Los nuevos métodos se enfrentaron a las ideas del viejo orden, escolástico y aristotélico, y en un principio se orientaron especialmente contra la cosmología geocéntrica dominante (la Tierra el centro del universo).



La teoría heliocéntrica (los planetas giran alrededor del Sol) de Copérnico (1473-1543), que poseía antecedentes en la misma Antigüedad, fue defendida radicalmente por Galileo, integrando no solo el marco teórico de Copérnico sino también los resultados de los astrónomos Tycho Brahe (1546-1601) y Johannes Kepler (1571-1630). El combate que libró este gran científico con las ideas e instituciones dominantes (que le costó condena y castigo por la Inquisición) se convirtió en un impulso extraordinario en la construcción de la nueva ciencia.

El debate con relación a los métodos de la ciencia residía en que para los escolásticos las "verdades" se encontraban en la revelación divina y no en el ejercicio de la experiencia y la razón. Fueron muy pocos los intentos antes del Renacimiento por acudir a la experiencia o a procedimientos experimentales.



Galileo Galilei

Galileo, además de su lucha por abrir espacio al heliocentrismo, contribuyó notablemente en la afirmación de la experimentación empírica y, especialmente, en el uso de las matemáticas (cuantitativas) para la descripción del mundo circundante. De la misma manera, el filósofo inglés Bacon fue un verdadero profeta de la ciencia empírica, y Descartes, filósofo y matemático francés, además de subrayar el papel de las matemáticas, fue un abanderado por una explicación mecanicista del universo.

La Revolución Científica

Para la revolución intelectual que se dio en las ciencias y las matemáticas del siglo XVII fue necesaria la matemática griega y árabe, pero además el desarrollo de ciertas ciencias empíricas y algunas técnicas nuevas. Tampoco puede decirse que las matemáticas del Renacimiento y el énfasis que se le dio al álgebra y a la aritmética fueran producto exclusivo del influjo griego o de los mismos trabajos árabes; las tradiciones medievales realizadas en ciudades italianas y germanas durante la época medieval, también, jugaron su papel.

Durante el Renacimiento, las matemáticas tuvieron aplicación en varias áreas: desde la contabilidad, la cartografía hasta la agrimensura, el arte y la óptica.

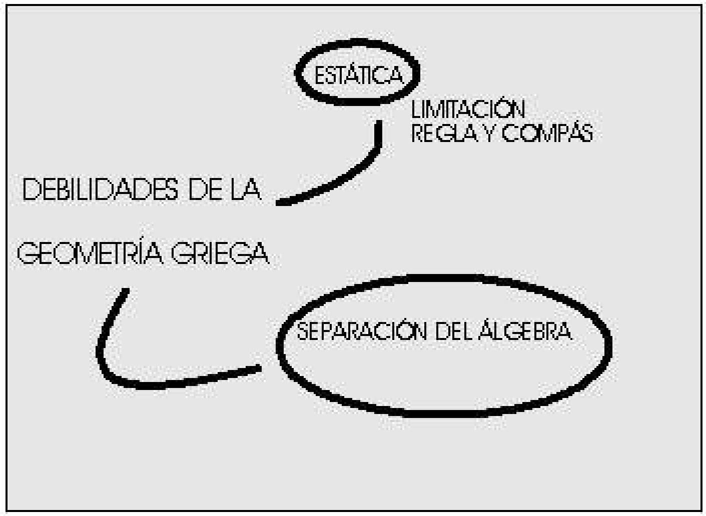
Durante esta época hubo un interés por las obras griegas de cierta complejidad teórica, pero esto no fue muy significativo; podemos decir que obras de Apolonio, Arquímedes o de Pappus (fl.c. 320 d. C.) no habían sido todavía traducidas al latín durante esta época. Tampoco la geometría tuvo mucho desarrollo pero, como hemos dicho antes, lo fundamental no estaba tanto en los resultados como en la actitud que se había abierto hacia la realidad y hacia los métodos del conocimiento.

Ya en el siglo XVII, la Revolución Científica buscó de-sarrollar métodos matemáticos y científicos apropiados para poder integrar una gran colección de resultados en la física y en la astronomía que se habían estado generando.

Los límites de la geometría clásica

Para que se tenga una idea de lo que significaba esta revolución en las matemáticas conviene que hagamos una breve digresión sobre la geometría clásica. Los límites que ésta tuvo se debieron esencialmente a dos características:

- Por un lado: los griegos antiguos establecieron que las construcciones geométricas y la geometría en general tenían que hacerse con base en la regla y el compás, lo cual restringía extraordinariamente los resultados geométricos. De la misma manera, la geometría era estática, las figuras que se dibujaban eran producto de los procedimientos con regla y compás que se habían establecido y, salvo en algunas excepciones importantes y significativas, el grueso se realizaba de esa manera.
- Por otro lado: las limitaciones en el álgebra, también, hacían que la geometría no tuviera una interrelación que pudiera potenciar sus posibilidades.



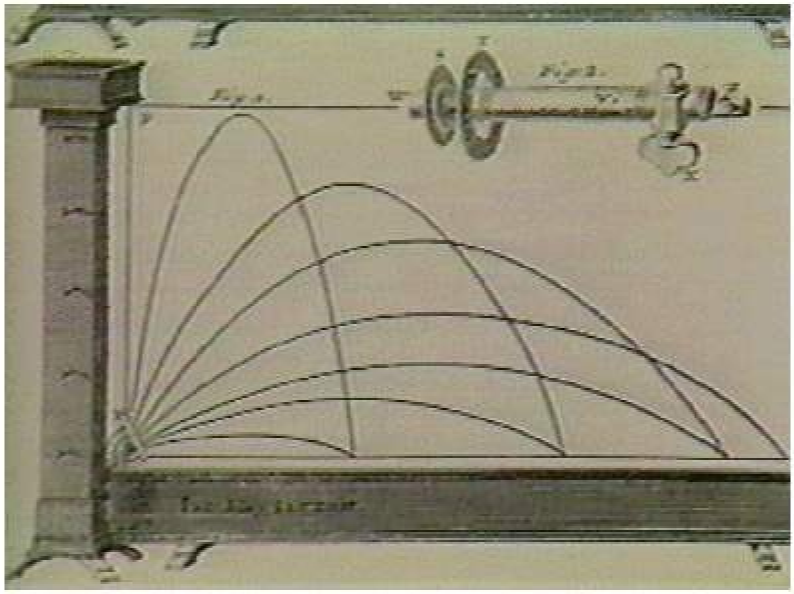
Entonces: en los tiempos de una sociedad emergente (como la europea del Renacimiento del siglo XVII), todo conducía a un replanteo del tipo de geometría que se hizo en la Antigüedad, y no solo de la geometría sino, también, de las matemáticas en general.

Consideremos un ejemplo: uno de los temas claves de la historia de las matemáticas es el de los métodos infinitesimales que constituyen la base del Cálculo Diferencial e Integral. En la Antigüedad griega se trabajó con los conceptos de infinito y continuidad que son los que están a la base del Cálculo.

Obras de Eudoxo y de Arquímedes en esa dirección son pioneras y constituyen, también, una muestra de la calidad de pensamiento que se llegó a tener en esta fase de la historia de la humanidad, sin embargo, la geometría euclidiana (que ocupó un lugar tan importante en la historia de las matemáticas durante siglos y siglos) poseía limitaciones que le impedían integrar teóricamente los métodos infinitesimales. Excluía, por ser esencialmente estática, el tiempo en los fenómenos físicos que trataba de describir.

Los procesos cinemáticos no podían ser captados por la geometría tradicional. Incluso, curvas como la espiral de Arquímedes, la cuadratiz de Hippias o la conchoide de Nicomedes, no podían ser integradas por esta geometría clásica porque éstas curvas estaban definidas en términos de movimiento.

Los métodos de Pappus tampoco podían integrarse y, por supuesto, no podía integrarse en ese marco conceptual el movimiento de los cuerpos físicos, los cambios en el espacio y el tiempo, la variación de las cantidades: asuntos fundamentales para los matemáticos y científicos del siglo XVII.



Proyectiles, detalle de una pintura de 1648

Motivados por problemas planteados por las ciencias físicas y por la vida social durante los siglos XVI y XVII, los matemáticos y científicos buscaron un nuevo enfoque y nuevos métodos para abordar los problemas; ahí nació precisamente el Cálculo Diferencial e Integral, que tuvo una repercusión extraordinaria en la historia de las matemáticas y en la geometría.

Los logros de la Revolución Científica

El siglo XVII fue una revolución científica en muchos campos, pero esencialmente en las matemáticas y en la astronomía. Podemos tener una idea de lo que esto significó para las matemáticas cuando citamos algunas de las principales obras de la época:

- la Geometría Analítica de Descartes y Pierre de Fermat (1601-1665),
- el mismo Cálculo de Newton y Wilhelm G. Leibniz (1646-1716),
- el Análisis Combinatorio y la Teoría de las Probabilidades que desarrollaron Fermat y Blaise Pascal (1623-1662),
- la Aritmética superior de Fermat, la Dinámica de Galileo y de Isaac Newton (1642-1727) y
- la Gravitación Universal de Newton,
- la Geometría Proyectiva de Gerard Desargues (1593-1662) y Pascal, y hasta
- los principios de la Lógica Simbólica con Leibniz.

1.4 DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA AL CÁLCULO

En esta sección nos interesa reseñar una de los momentos más importantes en la historia de las matemáticas.

La Geometría Analítica

Una mención aparte y especial para nosotros en este libro merece la Geometría Analítica que, como sabemos, conecta los conceptos de la geometría con los del álgebra y viceversa; al decir de Descartes, la expresión de curvas por medio de relaciones algebraicas. Ya desde la Antigüedad esta vinculación se trató de plantear. Por ejemplo Menecmo, quien fue discípulo de Eudoxo, se supone que conocía algo de geometría analítica; aunque con las limitaciones impuestas al álgebra por los griegos es difícil que esto haya sido muy desarrollado. Sin embargo, Apolonio de Perga en su famosa obra Las Cónicas, y quien vivió alrededor de los años 262 y 190 a.C., usó rectas de referencia para puntos, también un diámetro y una tangente a la misma para expresar esos puntos; es decir, algo parecido a lo que en geometría analítica moderna hacemos cuando usamos los ejes de coordenadas. También Pappus y Omar Khayyam los usaron en su resolución de ecuaciones cúbicas.

Parte de la obra de Las Cónicas fue traducida por los árabes y fue introducida en Europa precisamente por Edmund Halley (1556-1742) quien fue un científico amigo de Newton.

Descartes

Muchos otros matemáticos hicieron algunos avances en esta relación entre álgebra y geometría durante esta época. Giovani di Casoli, Nicole Oresme (c. 1323-1382) y el mismo Galileo habían tratado de establecer representaciones gráficas de conceptos como los de tiempo, rapidez, distancia y velocidad; sin embargo, fue René Descartes quien dió el impulso definitivo en esta dirección a la geometría. Subrayemos que Descartes es considerado el primer filósofo moderno y, por eso mismo, debe interpretarse que la geometría analítica corresponde al espíritu de lo que ya es una nueva era en el desarrollo de la sociedad occidental.

René Descartes

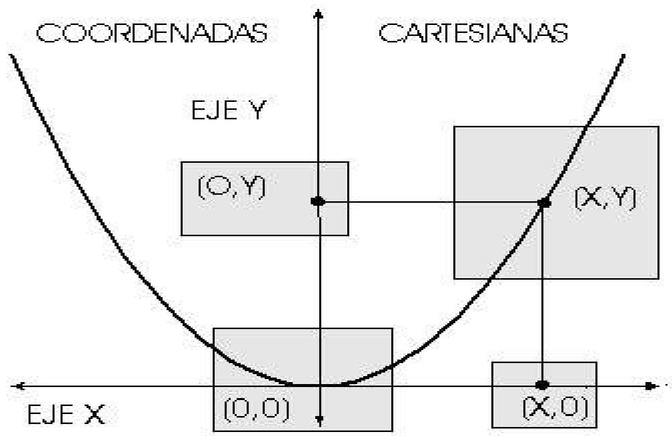
La obra de Descartes es auténticamente revolucionaria. Podemos decir que el método que él proponía se reduce a tres pasos:

1- La expresión de un problema geométrico en forma algebraica.

2- Resolución de las ecuaciones algebraicas que corresponden al problema geométrico.

3- Construir o interpretar geométricamente lo que planteaba la solución.

Descartes se dice que buscaba liberar a la geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al álgebra por medio de la geometría. Fue revolucionario Descartes al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Recordemos que en la Antigüedad para que una curva existiera era necesario que hubiera un procedimiento con regla y compás para poderla construir.



Fermat

Se le atribuye también la creación de la geometría analítica a Pierre de Fermat, quien escribió sobre estos temas antes incluso que Descartes hubiera publicado su obra seminal sobre el tema, pero que, desafortunadamente, fue publicada de manera póstuma posteriormente a la obra de Dercartes.

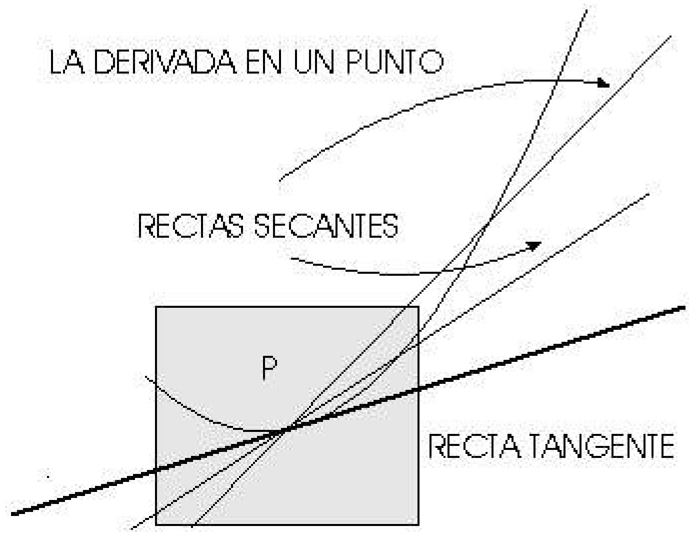
El Álgebra

Lo importante a subrayar acá es el uso de los métodos algebraicos. Podríamos decir que hasta el siglo XVII el álgebra estuvo subordinada a la geometría y a partir de este momento el rol se invirtió y, con ello, se dio un cambio sustancial en la historia de las matemáticas.

A pesar del impacto de la geometría analítica desarrollada por Descartes y Fermat, su repercusión no fue tan grande en esa época; fue hasta el trabajo de Gaspard Monge (1746-1818) y sus discípulos en la Escuela Politécnica Francesa, ya en el siglo XVIII y XIX, que llegó a tener la importancia, proyección, dinamismo e impacto que hoy reconocemos a la geometría analítica. Sin embargo, debemos decir que la geometría analítica fue decisiva para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, que constituyó una auténtica revolución en el pensamiento matemático.

Las matemáticas del siglo XVII

De manera general, podemos decir que durante el siglo XVII las matemáticas tuvieron un carácter muy aplicado, lo cual correspondía a una demanda en crecimiento del uso de las ciencias en la vida social, y a flujos e influjos en la economía y en las técnicas que afectaron los trabajos en las matemáticas; aunque no puede decirse de una manera mecánica y determinista que las demandas de la vida social y física fueron las que generaron los resultados matemáticos.



En el siglo XVII las ideas científicas se abrieron con gran intensidad. Gassendi (1592-1655) introdujo de nuevo una forma de la teoría atomista de Leucipo y Demócrito. Grimaldi (1618-1663) y después Newton obtuvieron resultados en la óptica y en el esclarecimiento de la naturaleza de la luz. Huygens hizo una descripción matemática de un funcionamiento ondulatorio de la luz. Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileo, inventó el barómetro descubriendo la presión atmosférica y también el "vacío". Es el siglo de Boyle con sus resultados sobre el vacío y la teoría de gases; también de Hooke, a quien se le atribuye haber sido el principal físico experimental antes de Faraday. Los resultados y las figuras científicas del XVII pueden seguir enumerándose pero, sin duda, es la obra de Newton la que culmina la llamada Revolución Científica.

La teoría newtoniana de la gravitación universal completó la destrucción del modelo cosmológico anterior. Con Newton, efectivamente, puede considerarse que una fase intelectual fue completada. En las etapas históricas siguientes nuevos saltos cualitativos hacia adelante en la ciencia van a demandar más condiciones económicas, técnicas, políticas y sociales.

Isaac Newton

El Cálculo

Con la creación del Cálculo infinitesimal va a completar los trabajos matemáticos que desde Eudoxo y Arquímedes en la Antigüedad hasta Kepler, Fermat y Descartes (entre muchos otros en la nueva época) se venían dando en busca de un método para abordar el "continuo". El Cálculo infinitesimal representó el resultado matemático más decisivo del siglo XVII, que generaría un extenso territorio intelectual para los siglos siguientes no solo en las matemáticas sino en la ciencia en general. Ya sólo esto hubiera sido suficiente para inmortalizar a Newton, pero realizó otra hazaña intelectual: la mecánica celeste; es decir, la descripción del movimiento de los astros a partir de las leyes de la mecánica terrestre. Fue la fundición teórica de los resultados de Copérnico y Kepler con los de Galileo. No se trataba de un sistema filosófico, sino de una descripción matemática.

La obra que condensó sus extraordinarias contribuciones a la mecánica fue el famoso Philosophiae naturalis principia mathematica ("Principios matemáticos de la filosofía natural"), publicado en 1687. Es una de las joyas del pensamiento humano. En ella, donde aplica hasta cierto punto el Cálculo, formula con gran rigor matemático las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, las cuales habían sido establecidas de manera empírica. Newton demostró que estas leyes se deducían de la ley de gravitación de los cuadrados inversos:

La fuerza gravitacional entre dos masas es igual a una constante por el producto de las masas, dividido éste por el cuadrado de la distancia entre ellas.

Explicó el movimiento de los cuerpos celestes y de las mareas. También estableció los fundamentos de la teoría del movimiento de la Luna. Newton asumió un tratamiento axiomático y matemático, en el que asumía el espacio y el tiempo como absolutos.

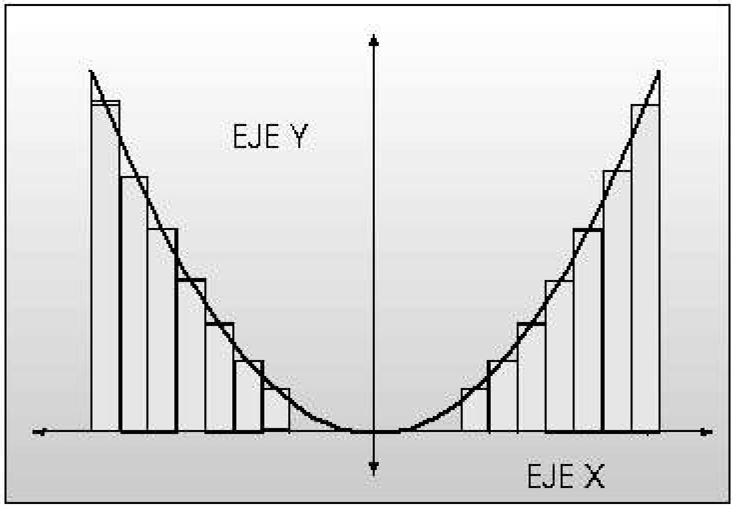
El descubrimiento-construcción del Cálculo lo realizó entre 1665 y 1666 mientras estaba en su lugar de nacimiento en el campo para escapar de la peste que atormentaba Cambridge.

Newton construyó el Cálculo entre 1665 y 1666 mientras Leibniz lo hizo entre 1773 y 1776, pero fue Leibniz quien publicó primero sus resultados entre 1684 y 1686 y, luego, lo hizo Newton entre 1704 y 1736. Ambos hicieron sus contribuciones de manera independiente y con características propias, sin embargo se dio una polémica muy famosa, que duró décadas, sobre quién lo había encontrado primero.

Con el Cálculo se resolvieron problemas fundamentales que implicaban el uso de un concepto central: el límite. Tanto Newton como Leibniz usaron esta noción pero lo hicieron de una manera más bien intuitiva, física o geométrica. Una formulación más precisa y rigurosa tendría que esperar más de un siglo en la historia de las matemáticas.

Wilhelm Leibniz

Con la idea de "límite" no solo se respondería a los problemas inmediatos con los que se enfrentaron los matemáticos de la Revolución Científica, sino a aquellos originados en la Antigüedad alrededor del infinito y la continuidad. Todos esos procesos matemáticos en los que se usó el término "indefinidamente" hacían referencia al límite. Ya fuera que se planteara realizar sumas indefinidas de términos o subdivisión indefinida de una longitud, área o volumen, hay una relación con los métodos infinitos. Es la noción de límite a la que se apela cuando en el método de Exhausción se pasa del área de polígonos regulares inscritos en un círculo con n lados, al área del círculo. O, también, cuando se puede dividir un área en un número infinito de rectas "indivisibles", o cuando para calcular el área bajo la curva se construye n rectángulos y, luego, este número se vuelve infinito o, lo que es igual, la base de los mismos "se va hacia el cero".



Para el cálculo de áreas se retomó el espíritu del método de eshausción con aproximaciones al área por medio de figuras geométricas representadas analíticamente; los rectángulos sustituyeron los triángulos (o polígonos compuestos por triángulos) que se usaron anteriormente. El concepto de la integral posee su origen en estos objetivos. Debe subrayarse la existencia de una íntima relación entre Geometría Analítica y Cálculo. Aunque el cálculo de áreas, longitudes y volúmenes ocupó una historia más larga en las matemáticas, el cálculo de la tangente a una curva (planteado en el siglo XVII) fue decisivo y determinante para el desarrollo de los métodos El cálculo de la recta tangente y el de la velocidad instantánea se redujeron al cálculo de la derivada, lo que hoy reconocemos como un tipo particular de límite. Newton, incluso, consideró sus derivadas como velocidades. No podemos dejar de mencionar que la relación complementaria o inversa entre los procesos de la derivación y la integración fue uno de los resultados más interesantes y sorprendentes de esta temática.

1.5 EN EL SIGLO XVIII

Los matemáticos europeos de estos siglos sobrepasaron la producción matemática antigua; esto en términos cuantitativos y, sobre todo, cualitativos: nuevas disciplinas y nuevos conceptos matemáticos se crearon en este período.

Intuición y aplicación en las matemáticas

En el siglo XVIII las matemáticas fueron aún todavía de carácter más cuantitativo y con mayor aplicación física. A pesar de la gran cantidad de resultados que se dieron, muchos historiadores de la ciencia consideran que también había un marasmo lógico en los fundamentos de la matemática que se hacía. El corazón de las matemáticas era el Cálculo y aunque éste había generado un gran progreso poseía muchas lagunas lógicas; los números irracionales, por ejemplo, no serían admitidos sino hasta principios del mismo siglo XIX, aunque los números negativos y los complejos no.

Los matemáticos del siglo XVIII se concentraron en el Cálculo y en sus aplicaciones a la mecánica. Las principales figuras fueron el mismo Leibniz, los hermanos Bernoulli, Jacques (1654-1705) y Jean (1667-1748), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827). Aunque debe incluirse a los matemáticos franceses Clairaut (1713-1765), D'Alambert (1717-1783) y Maupertuis (1698-1759), los hermanos suizos Nicolaus (1695-1726) y Daniel Bernoulli (1700-1782) hijos de Jean.

Podemos decir que la mayor parte de las matemáticas y la física entre 1600 y 1900 estuvo asociada de alguna manera a los métodos establecidos por el Cálculo Diferencial e Integral. Estos han sido aplicados extraordinariamente en todo fenómeno que exija una medición tanto en mecánica, magnetismo, electricidad, gravitación, calor, luz, movimiento ondular.

El carácter aplicado que predominó en las matemáticas del siglo XVII se amplió especialmente durante el siguiente siglo. Esto era coincidente, además, con una demanda creciente hacia el uso de las ciencias en la vida social (en la producción). Los influjos de la economía, las técnicas o la vida social en general afectan e influyen en la práctica matemática. Debe reconocerse este tipo de factores a la hora de estudiar la historia de las ciencias. Pero debe tenerse cuidado en no establecer condicionamientos muy mecánicos o simples. Las capacidades humanas para la creación intelectual suelen distanciarse de los contextos materiales y sociales inmediatos, y dejar correr la imaginación y el razonamiento lógico muy lejos. En el caso de las matemáticas esto es también cierto. El estudio de propiedades abstractas de la realidad (una vez conceptualizadas) puede ampliarse al margen de la influencia directa de la realidad social o material.

Un balance

En menos de dos siglos los matemáticos europeos lograron sobrepasar con creces los límites de toda la producción matemática de la Antigüedad. Eso se explica sin duda por las diferencias en las sociedades y en el trabajo intelectual que existió entre ambos tipos de organización social. Es importante señalar esta diferencia en tanto expresa la existencia de un ritmo muy elevado en la producción científica y matemática que ha sido -desde entonces- decisivo para el progreso de la cultura y la sociedad occidental. Debe subrayarse, además, que no solo se amplió cuantitativamente el número de trabajos sino que hubo un progreso cualitativamente superior, tanto en la profundidad de los métodos como en la creación de nuevos conceptos y diferentes disciplinas matemáticas.

Los matemáticos del siglo XVII terminaron de establecer varios cambios fundamentales con relación a las matemáticas antiguas:

- Papeles diferentes para el álgebra y la geometría: del dominio en métodos y criterios de rigor basados en la geometría (en la Antigüedad), se pasó a darle relevancia al álgebra.
- Los resultados de las matemáticas dejaron de percibirse como simples idealizaciones de la experiencia y se empezó a favorecer --lentamente-- un tratamiento más abstracto: de la idealización inmediata a la construcción de conceptos y métodos.
- La introducción del Cálculo con métodos alejados de los estándares de rigor y deducción de la geometría clásica promovió el uso de procesos inductivos.
- La estrecha relación entre matemáticas y ciencias naturales condujo a una interdependencia y fusión que no permitía muchas distinciones entre ciencias y matemática.

Las matemáticas del siglo XVIII, a diferencia de las del siglo XVII, fueron esencialmente cuantitativas. Fue un siglo de un gran desarrollo matemático conectado a la evolución de las ciencias llamadas naturales. Configuraba, como veremos, una situación que podríamos caracterizar como contradictoria. Se tenía una gran producción matemática, un gran éxito en la capacidad de predicción en la ciencia de los resultados matemáticos y, al mismo tiempo, según muchos historiadores "un marasmo lógico en los fundamentos". El centro del Análisis era el Cálculo y a pesar de la enorme oscuridad lógica, a pesar del uso "liberal" de los números, éste experimentó un enorme desarrollo.

El Análisis

El más grande de los matemáticos del siglo XVIII fue, sin duda, el suizo Leonhard Euler y el más prolífico de todas las épocas: 886 libros y artículos, sobre cada uno de los campos de la matemáticas de su época.

Leonhard Euler

El trabajo de este gran matemático permite apreciar la diversidad de los usos matemáticos y aplicaciones que podía tener el Cálculo: ecuaciones diferenciales, geometría analítica y diferencial de curvas y superficies, series y cálculo de variaciones. En la física, Euler usó la mecánica analítica (la aplicación del Cálculo a la mecánica tradicionalmente geométrica). Calculó la perturbación de los cuerpos celestes en la órbita de un planeta y las trayectorias de proyectiles lanzados en medios con resistencia determinada. Estudió la propagación del sonido y la consonancia y disonancia musicales. Fue el único de los científicos del siglo XVIII que afirmó el carácter ondulatorio de la luz (y no corpuscular y analizó el calor como oscilación molecular). Euler describió con ecuaciones diferencialesel movimiento de un fluido (ideal) y aplicó su modelo a la circulación sanguínea.

Según el parecer de algunos historiadores: Euler hizo por el Cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz lo que Euclides hicieron por la Geometría de Eudoxo y Teeteto, o Vieta por el álgebra de Al-Khoarizmi y de Cardano. Con Euler los resultados de Newton y Leibniz se integraron armónicamente al Análisis, concebido éste como el campo matemático que engloba el estudio de los procesos infinitos. La obra que esencialmente realiza esta precisión y ampliación del Cálculo infinitesimal fue Introductio in analysin infinitorum, publicada en 1748. En este libro la idea de función, que estuvo presente de forma intuitiva en sus predecesores es convertida por Euler en el concepto central del nuevo análisis. El concepto de función y las funciones algebraicas y trascendentes elementales ya habían sido introducidas en el siglo XVII. En la consideración de varios problemas clásicos, Leibniz, Jacques y Jean Bernoulli, L'Hôpital, Huygens y Pierre Varignon usaron funciones conocidas y construyeron muchas otras de mayor complejidad.

De la misma manera, en este siglo se desarrolló también el cálculo de funciones de 2 y 3 variables. Aunque Newton, Jean y Nicolaus Bernoulli habían realizado la diferenciación en funciones de 2 variables, la teoría fue plenamente desarrollada por varios matemáticos: Alexis Fontaine de Bertins (1705-71), Euler, Clairaut y D'Alembert. Entre 1744 y 1745, D'Alembert trabajando en dinámica extendió el cálculo de las derivadas parciales.

Los matemáticos franceses del siglo XVIII

Aparte de Jean D'Alembert (1717-1783), Alexis Claude Clairaut y Etienne Bézout (1730-1783), Francia tuvo una presencia muy importante en las matemáticas de la última parte del siglo XVIII, con personalidades vinculadas o afectadas, de una u otra forma, con la Revolución Francesa.

Los seis grandes matemáticos de ese período fueron Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Laplace (1749-1827), Condorcet (1743-1794), Monge (1746-1818), y Carnot (1753-1823). Todos ellos destinaron algunos de sus trabajos al Cál-culo diferencial e integral.

Por ejemplo, Monge hizo contribuciones a la geometría analítica y diferencial. También Carnot trabajó en geometría y, por otro lado, Legendre hizo aportes al Cálculo, a la teoría de funciones, la teoría de números, y la matemática aplicada.

Probablemente, quien más lejos llegó de este grupo de franceses fue Lagrange, considerado muchas veces el matemático más profundo del siglo XVIII (con Euler). Lagrange creó lo que se llama el cálculo de variaciones.

Laplace realizó contribuciones decisivas a las probabilidades, y a la mecánica (en particular a la astronomía). Se ha considerado su libro Mécanique céleste (1799-1825, 5 volúmenes) la culminación de la teoría newtoniana de la gravitación universal. Laplace demostró que el sistema del mundo (descrito por la matemática newtoniana) era estable. Algo así como que no era necesaria la intervención divina cotidianamente para el funcionamiento del universo.

La amplia aplicación física de las matemáticas por parte de los matemáticos de este siglo originó expresiones como que las matemáticas eran solo un instrumento para la física (Laplace), o que la historia se describía como una transición de un siglo XVII de matemáticas a una era de mecánica (D'Alambert, Denis Diderot, 1713-1784). Sin embargo, también estaba la opinión (Lagrange) de que la mecánica llegaría a ser parte del Análisis.

Una síntesis

En el siglo XVII hubo desarrollos importantes en el álgebra, se inició la Geometría Proyectiva y también la Teoría de las Probabilidades, se creó la Geometría Analítica, y muchos asuntos de la Antigüedad clásica fueron abordados y resueltos. Lo más importante, sin embargo, sería la creación del Cálculo Diferencial e Integral.

Ya en el siglo XVIII el Cálculo ampliaría extraordinariamente los campos abiertos y generaría nuevos, por ejemplo: las Series Infinitas, el Cálculo de Variaciones, la Geometría Diferencial, las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis de Funciones con variables complejas y muchas otras.

1.6 EL SIGLO XIX Y LAS NUEVAS MATEMÁTICAS

En el siglo XIX, los temas que se desarrollarían fueron las Geometrías no euclidianas, la Teoría de Números, la Geometría de Grupos y el Algebra en general, el Análisis con variables complejas; y en la segunda mitad de ese siglo aparecería la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos.

Dos factores claves

Hay dos elementos de la primera parte del siglo XIX que ocuparon un papel esencial en la historia de las matemáticas:

- por un lado, la construcción de números que no seguían lo esperable en ellos, los cuaterniones de William Hamilton (1805-1865); y,
- por otro lado, las geometrías no euclidianas.

  Estos dos resultados teóricos representaron un auténtico motor para sacudir el mundo matemático.

Los cuaterniones de Hamilton (dos libros condensan su obra: Lectures on Quaternions de 1853 y Elements of Quaternions de 1866, póstuma) eran números que no respetaban la propiedad de la conmutatividad, es decir, $AB = BA$, lo que rompía con la concepción clásica o tradicional sobre las operaciones. William Kingdon Clifford (1845-1879) generalizaría los cuaterniones en lo que llamó bi-cuaterniones (1873-1876).

Por el otro lado, las geometrías no euclidianas abrían una interpretación para la geometría y para las matemáticas en general que parecía encontrar contradicción con la realidad física circundante. Como veremos, la idea central de las geometrías no euclidianas nacía de reconocer que uno de los axiomas de la geometría euclidiana clásica no se podía probar como una deducción directa de los otros axiomas que en esta geometría se daban. Al ser este famoso axioma, que se llamó axioma de las paralelas, un hecho independiente, se justificaba lógicamente la posibilidad de una proposición contraria al mismo; con un axioma contrario y los restantes axiomas euclidianos se podían construir geometrías diferentes. Los grandes creadores fueron Carl Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Nikolai Lobachevsky (1793-1856). Sus contribuciones las estudiaremos con detalle más adelante.

Aunque el impacto de estos resultados fue extraordinario en la historia de todas las matemáticas del siglo XIX, no fue sino hasta el trabajo realizado por el alemán Bernhard Riemann, 1826-1866, (ya en la segunda parte del siglo XIX) que las geometrías no euclidianas serían integradas a las principales ejes de desarrollo de las matemáticas del siglo XIX. Algo así como que Riemann colocó a las geometrías no euclidianas en un marco teórico más amplio.

Antes de Riemann, sin embargo, se dieron intentos de generalización de la geometría clásica; aunque solo serían reconocidos después de la muerte de Riemann. Vale la pena citar el trabajo de Hermann Grassmann (Ausdehnungslehre, 1844), quien trabajó con espacios de n dimensiones y cuyos resultados serían retomados décadas después para crear el análisis vectorial para espacios afines y métricos. También Arthur Cayley en 1843 había usado el concepto de espacio de n dimensiones.

Geometría proyectiva

Un campo de la geometría que también posee importancia fue el estudio de las propiedades proyectivas de las figuras, lo que se suele llamar como la Geometría Proyectiva. Puede encontrarse trazos de ésta en Pascal y Desargues, y se puede señalar como referencia la obra desarrollada primeramente por Gaspard Monge (1746-1818), quien fue director de la Ecole Polytechnique en Francia y que, muchas veces, se caracteriza como el primer especialista moderno de la geometría. Monge publicó su libro Géométrie descriptive, que condensaba sus lecciones en la Ecole Normale entre 1794 y 1795, que utilizaba proyecciones.

Víctor Poncelet

Fue, sin embargo, un discípulo de Monge, Jean Victor Poncelet (1788-1867), quien realmente hizo una gran sistematización de estas propiedades proyectivas de las figuras (Applications d'analyse et de géométrie 1813-1814, Traité des propietés projectives des figures , 1822).

En Francia, Michel Chasles (1793-1880) continuó la obra de Poncelet (Traité de géométrie supériure, 1852).

En Alemania, Jakob Steiner (1796-1863) también hizo geometría proyectiva (Systematische Entwicklungen, 1832). Tiempo después, el alemán K. G. C. von Staudt (1798-1867) construyó la geometría proyectiva sin usar magnitudes ni múmeros (en su obra Geometrie der Lage, 1847).

Estos trabajos también tendrían un impacto importante en las matemáticas del siglo XIX.

Álgebra

Uno de los campos más desarrollados en el siglo XIX también fue el álgebra, y una de las grandes creaciones del álgebra fue la Teoría de Grupos, donde la figura ciñera es la del francés Evariste Galois (1811-1832).

Evariste Galois

Un conjunto de elementos forma un grupo con una operación si: el conjunto es cerrado bajo esa operación (operar dos elementos da otro del mismo conjunto), contiene un elemento neutro ($w * neutro = w)$, para cada elemento existe un elemento inverso ($w * w^{-1} = neutro$), y la operación es asociativa $[x * (y * z) = (x * y) * z]$. El conjunto puede estar formado de números, puntos, rectas y otras figuras, transformaciones (algebraicas o geométricas) y otros objetos. Las operaciones pueden ser aritméticas, algebraicas o geométricas. La fuerza de generalización que estos instrumentos matemáticos poseen es extraordinaria.

Galois, usando ideas que había mencionado el matemático también francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y el italiano Paolo Ruffini (1765-1822), expresó las propiedades fundamentales de lo que se suele llamar el Grupo de Transformaciones de las raíces de una ecuación algebraica.

A partir de un trabajo sobre estos grupos, muchos de los problemas clásicos podían ser resueltos como, por ejemplo, la trisección del ángulo, la duplicación del ángulo, la solución de las ecuaciones cúbica y bicuadrática, así como la solución de ecuaciones algebraicas de diferentes grados.

Aunque la obra de Galois fue anterior a la de los británicos, sus ideas no tuvieron impacto hasta 1846 cuando se publicaron. Su influencia condujo también a la elaboración del concepto de cuerpo a través de resultados de los alemanes Richard Dedekind, Leopold Kronecker (1823-1891) y Ernst Eduard Kummer (1810-1893).

En el mundo británico, ya mencionamos los trabajos algebraicos de Hamilton y Clifford, también debemos mencionar que muchos de los resultados de los ingleses en el siglo XIX fueron en el álgebra y sus aplicaciones a la geometría; entre los nombres más relevantes que podemos citar están: Cayley, Sylvester y Salmon. Por ejemplo Cayley trató de dar una sistemática teoría de los invariantes de formas algebraicas, con simbolismo propio y y sus leyes (algo así como una contraparte algebraica de la geometría proyectiva de Poncelet); sus trabajos le permitieron integrar la geometría métrica dentro de la proyectiva. James Joseph Sylvester (1814-1897) obtuvo una teoría de los divisores elementales (1851) y una ley de la inercia de formas cuadráticas (1852). George Salmon (1819-1914) contribuyó esencialmente en la redacción de textos en geometría analítica y teoría de invariantes que fueron decisivos para muchas generaciones. La influencia anglosajona llegó a los Estados Unidos, lo que se aprecia en la obra de Benjamin Peirce (1809-1880).

No solo en el mundo anglosajón tuvieron impacto los algebristas británicos. También en Alemania, con matemáticos como Otto Hesse (1811-18749 , Siegfried Heinrich Aronhold 81819-1885), Alfred Clebsch (1833-1872) y Paul Gordan (1837-1912).

Geometría y álgebra

Buena parte de los trabajos en geometrías no euclidianas, geometría proyectiva y en álgebra y teoría de grupos, fue sintetizada de una manera extraordinaria por un gran matemático alemán: Felix Klein (1849-1925).

En 1872, Klein sistematizó la geometría usando la teoría de grupos en algo que se llamó el Programa de Erlangen. Una geometría era el estudio de las propiedades de figuras que se mantienen invariantes cuando se aplica un grupo de transformaciones. El asunto se puede poner así: al ampliar o reducir el grupo se pasa de una goemtría a otra. Se asocia, entonces, grupos de transformaciones y clases de geometrías. Un ejemplo: la geometría euclídea plana se asocia al grupo de transformaciones dado por las traslaciones y rotaciones en el plano (los objetos son las figuras del plano invariantes bajo este grupo de transformaciones); la geometría proyectiva se asocia a un grupo que se denomina precisamente proyectivo.

Felix Klein

Esta aproximación revolucionaria dominó la geometría hasta hace poco tiempo. La Teoría de Grupos permitía la síntesis de los trabajos algebraicos y geométricos de Monge, Poncelet, Gauss, Cayley, Clebsch, Grassmann y Riemann. Para que se tenga una idea, Klein demostró que las geometrías no euclidianas se podían concebir como geometrías proyectivas.

Debe mencionarse en todos estos resultados la colaboración de un gran matemático noruego: Sophus Lie (1842-1899), que con Klein juntos comprendieron la importancia del uso de los grupos; de hecho, mientras Klein enfatizó los grupos discontinuos, Lie lo hizo en los continuos.

Tal vez podamos decir que al igual que la Geometría Analítica en el siglo XVII integró la geometría clásica con métodos algebraicos desarrollados por los algebristas del Renacimiento y rescatando tradiciones medievales y árabes, Klein también integró esta vez resultados de la geometría del siglo XIX con el álgebra de la misma época. Estos vínculos entre álgebra y geometría, como también sucedería entre todas las diferentes disciplinas y campos de las matemáticas, se convertirían hasta hoy en día en una característica esencial de la matemática moderna.

La lógica

Dos asuntos plantearon el desarrollo de los métodos lógicos en las matemáticas del siglo XIX. Uno de ellos fue los problemas de rigor, las "lagunas", que se encontraron en el desarrollo del Cálculo; esto condujo a una construcción más rigurosa de los métodos infinitesimales y de los números reales (especialmente los irracionales). Los trabajos de Bernard Bolzano (1781-1848), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) y Richard Dedekind (1831-1916), y hasta el mismo creador de la teoría de conjuntos Geor Cantor (1845-1918), se colocan en esta dirección.

Por otra parte, más por el lado algebraico (generalización de objetos, reglas operatorias, simbolismo) se encuentra los resultados de los británicos Augustus De Morgan (1806-1871) y especialmente el trabajo de George Boole, 1815-1864, (The Laws of Thought, 1854) que trató de construir una álgebra de la lógica, en la dirección de lo que había sido una idea de Leibniz: una characterica generalis, es decir: un lenguaje simbólico y operatorio para realizar el pensamiento. Los trabajos de Boole superan los de Leibniz (que ya habían intentado ser superados por diversos autores previos: Segner, J. Lambert, Ploucquet, Holland, De Castillon, Georgonne). Sus trabajos también van a servir como base para Jevons, el mismo De Morgan y el norteamericano Charles Sanders Peirce. De Morgan había establecido en su Formal Logic de 1847 que la lógica se refiere esencialmente a relaciones, al igual que Boole. Peirce extendería estos resultados en sus escritos entre 1870 y 1893, y Schröeder los sistematizaría. El énfasis en las relaciones era una consecuencia del flujo general que apuntalaba la axiomática y de una nueva aproximación hacia la matemática y la lógica. Peirce enfatizó los conceptos de "función proposicional" y los cuantificadores. La conjunción de relaciones, clases, funciones proposicionales y cuantificadores abría una nueva etapa en la lógica y describía el panorama de las misma previo a un gran lógico alemán: Frege.

Estos trabajos motivaron en buena parte el proyecto logicista de Gottlob Frege que buscó toda su vida reducir las matemáticas a la lógica (Die Grundlagen de Arithmetik, 1884). Para buscar su cometido, Frege construyó el aparato simbólico más importante de la lógica desde Aristóteles (Begriffsshrift, 1879). En esa dirección se colocó durante bastantes años la obra del inglés Bertrand Russell (1872-1970); su libro escrito con Alfred North Whitehead (1861-1947), Principia Mathematica, es un clásico de la filosofía de las matemáticas y de la lógica.

Resulta intersante mencionar el trabajo en lógica matemática del italiano Giuseppe Peano (1858-1932), que buscaba -como Frege- un lenguaje formalizado para expresar las matemáticas (padre de símbolos como: $\supset$ contiene a, $\in$ pertenece a, $\cup$ unión).

En una perspectiva diferente, pero dentro de la motivación de formalizar las matemáticas, se encuentra una parte de la obra del gran matemático alemán David Hilbert (1862-1943). Peano había ofrecido una fundamentación formal y axiomática del álgebra y el análisis, pero faltaba la geometría; Hilbert asumió esa tarea en su famoso libro Grundlagen der Geometrie (1899) Hilbert usó 21 axiomas para reconstruir el edificio de la geometría euclidiana.

El énfasis en los aspectos formales y axiomáticos, dio pie para una filosofía de las matemáticas que se denominó formalismo, y de la que Hilbert fue su principal exponente. Aunque el formalismo tenía cosas en común con el logicismo de Frege y Russell, había diferencias filosóficas de fondo.

David Hilbert

No sobra mencionar otra aproximación a estos intentos de fundamentación de las matemáticas: el intuicionismo, desarrollado esencialmente por el holandés L.E.J. Brouwer (1881-1966), que afirmaba que lo más importante para la naturaleza de las matemáticas era la intuición y no el lenguaje y la lógica. En el bando intuicionista estuvo uno de los colegas de Einstein en Zürich en 1913, y un gran matemático: Hermann Weyl (1885-1955). Toda esta temática ocupó un lugar importante en las primeras décadas del siglo XX.

1.7 LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Podemos establecer una periodización de la historia de las matemáticas distinta a la que ofrecimos al comenzar este capítulo, con una óptica un poco diferente, más bien filosófica.

Otra periodización

Podemos considerar la historia de las matemáticas dividida en dos grandes fases: antes del siglo XIX y sus resultados matemáticos, y después de estos resultados. El asunto que establece la división es la naturaleza de las matemáticas o, mejor dicho, la opinión y conciencia sobre la naturaleza de las matemáticas que la comunidad matemática desarrolló.

Hasta el siglo XIX, con la emersión de las geometrías no euclidianas, álgebras y números abstractos no conmutativos, siempre, de alguna u otra forma, se asumió las matemáticas como una descripción directa de la realidad física del mundo que nos rodea. La tesis de que los números representan cosas, corazón de la visión pitagórica de la Antigüedad, se filtró en la conciencia occidental, en el Renacimiento, la Revolución Científica y en el período posterior para afirmar una relación vinculante y de dependencia entre las matemáticas y la realidad.

Las cosas cambiaron en la conciencia de la comunidad matemática ante la evidencia de teorías que no parecían responder a la evidencia física y a una relación con la realidad y el mundo que nos rodea; se empezó a desarrollar la idea y la opinión de que las matemáticas no necesariamente se refieren de manera directa al mundo, y que las teorías y conceptos de las matemáticas tienen validez en sí mismos y medidos por parámetros establecidos por la comunidad matemática, y que suelen ser la validez lógica y el rigor conceptual.

Mientras en el siglo XVIII las matemáticas eran vistas probablemente como una continuación de la física, de la mecánica y la cinemática, capaces de predecir eventos de la realidad, en el siglo XIX hay visiones que establecen con toda claridad una distancia de las matemáticas con relación al mundo.

La autonomía de las matemáticas

La autonomía e independencia de las matemáticas conforman, entonces, un elemento diferente que arranca con toda propiedad en el siglo XIX, aunque algunos científicos y matemáticos anteriormente habían expresado ideas en ese mismo sentido.

Las matemáticas como campos alejados de la aplicación física y de la descripción de la naturaleza permitía la creación de especialistas de las matemáticas puras: un profesional bastante diferente al que en siglos anteriores podía "representar" al matemático.

Si ponemos las cosas en esta perspectiva histórica, la relevancia que ocupa la geometría no euclidiana es extraordinaria. Hasta el siglo XIX, 23 siglos después de la obra de Euclides que estableció la mayor sistematización de la geometría antigüa, se realizó un cambio de visión sobre las matemáticas; y este cambio de visión radical fue producto en especial de las geometrías no euclidianas, que rompían la organización axiomática clásica y afirmaban, con plena validez matemática, teorías en contradicción con la geometría euclidiana.

El impacto era enorme, pues la geometría euclidiana describía supuestamente el mundo o las percepciones que sobre el mismo se tenían. ¿Cómo era posible una geometría que no hiciera lo mismo y fuera también válida?, ¿no se trataría, entonces, solamente de quitar, añadir o modificar uno de los axiomas o postulados de la geometría euclidiana? Era evidentemente algo mucho más profundo que eso: era cambiar la visión sobre las matemáticas y su relación con el mundo que predominó durante tanto tiempo.

Debe decirse, sin embargo, que no solo la geometría no euclidiana contribuía a una percepción diferente de la relación entre las matemáticas y el mundo; el álgebra abstracta alteró la "normalidad" de la artimética tradicional, y esto tuvo un gran impacto. De hecho, el influjo de abstracción que supone la naturaleza misma del álgebra impregnó crecientemente todos los campos de las matemáticas (unos más que otros), y una actitud consistente de abstracción y generalización de objetos y métodos, una "separación" de las matemáticas del mundo.

Las geometrías no euclideanas constituyen una de los grandes revoluciones en el pensamiento, con implicaciones extraordinarias en la historia de las matemáticas y de la ciencia. Y esto es lo que nos interesa reseñar en las siguientes páginas de este libro.

1.8 PREGUNTAS

Conteste las siguientes preguntas

1. ¿Cuál es el periodo alejandrino de la historia de las matemáticas?
2. ¿Cuáles consecuencias tuvo la actitud de Eudoxo con relación a los inconmensurables?
3. ¿Quién se podria decir fue el principal matemático de la Antigüedad griega?. ¿Por qué?
4. Describa las características esenciales de la educación y el conocimiento en la Edad Media?
5. ¿Qué es el Renacimiento?
6. Mencione algunos de los logros de la llamada Revolución Científica.
7. Explique algunas de las contribuciones intelectuales de Galileo.
8. Explique por qué el autor considera que la geometría euclidiana poseía límites.
9. Mencione 3 resultados famosos del trabajo intelectual de Newton.
10. Explique y compare algunas de las principales características de las matemáticas del siglo XVIII.
11. ¿Qué hizo Euler por el Cálculo?
12. Señale 2 resultados que para el autor de este libro fueron decisivos en la historia de las matemáticas del siglo XIX.
13. ¿Cuá fue la principal contribución de Galois a las matemáticas?
14. ¿Cuál fue la contribución matemática de Lobachevsky?
15. ¿Explique qué era el Programa de Erlangen?
16. ¿Cómo se dividieron su trabajo matemático Lie y Klein?, explique.
17. ¿Que teoría famosa creó Georg Cantor?
18. Mencione una contribución de Peano a las matemáticas?
19. ¿Qué es el Logicismo?

    Diga si la proposición es falsa o verdadera. Explique.

20. Pitágoras perteneció al periodo alejandrino.
21. Apolonio rechazó los irracionales.
22. Las paradojas de Zenón fueron utilizadas por San Agustín.
23. Las matemáticas medievales fueron producto exclusivo de los europeos.
24. Los árabes dieron importancia al álgebra y a la aritmética.
25. La Revolución Científica precedió al Renacimiento.
26. La Geometría Analítica fue creada por Apolonio de Perga.

27. Las matemáticas del siglo XVIII estuvieron basadas en la lógica.
28. La geometría no euclidiana y los cuaterniones fueron resultados de la Revolución Científica.
29. Desargues fue el creador de la Geometría proyectiva.
30. Boole es el padre del Logicismo.
31. Galileo pensaba que la derivada era una velocidad.
32. Leibniz se adelantó a Newton en la creación del Cálculo.
33. Frege publicó Principia Mathematica.
34. Hilbert creó una geometría no euclidiana.

Comente el siguiente párrafo:

"Las cosas cambiaron en la conciencia de la comunidad matemática ante la evidencia de teorías que no parecían responder a la evidencia física y a una relación con la realidad y el mundo que nos rodea; se empezó a desarrollar la idea y la opinión de que las matemáticas no necesariamente se refieren de manera directa al mundo, y que las teorías y conceptos de las matemáticas tienen validez en sí mismos y medidos por parámetros establecidos por la comunidad matemática, y que suelen ser la validez lógica y el rigor conceptual."

Capítulo II: En la Geometría Euclidiana

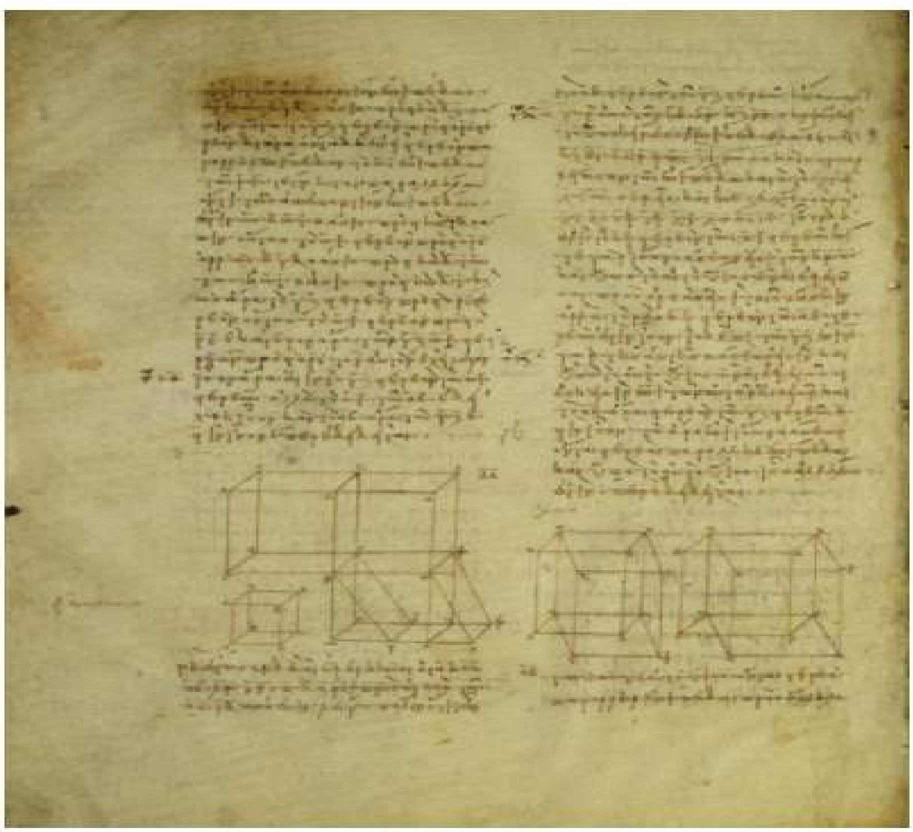
El sentido de las geometrías no euclidianas solamente se puede captar si se entiende la evolución de las matemáticas. En particular el papel que jugaron y juegan esos términos que solemos llamar postulados o axiomas.

Si bien las matemáticas no son reducibles a puras deducciones lógicas con base en axiomas, nadie puede negar que estos asuntos han sido y seguirán siendo muy importantes para todas las dimensiones de las matemáticas. Y, por lo tanto, para su aprendizaje y enseñanza.

Vamos a realizar una incursión en la historia de la geometría para desentrañar los secretos de esas geometrías. Antes mencionemos que la palabra "geometría" viene del griego geometrein (geo: tierra, y metrein: medir). Según Herodoto, el historiador griego del siglo V a.C., el origen de la geometría se debía a los agrimensores egipcios; la realidad es que todas las viejas civilizaciones tuvieron conocimiento o prácticas geométricas.

Empezamos con Euclides y sus famosos postulados.

Euclides de Alejandría y su famoso libro los Elementos a veces se asocian como si fueran lo mismo; la realidad es, sin embargo, que se guardan muchos libros o tratados que Euclides escribió en campos que van desde la astronomía y música a la óptica y mecánica, e, incluso, tuvo un trabajo sobre las secciones cónicas.



Página de los Elementos, versión griega del siglo IX

Los historiadores de las matemáticas más conocidos señalan que se ha perdido por lo menos la mitad de las obras de Euclides. Algunos especulan que hasta elementos de geometría analítica podían haber estado en estos libros y obras perdidos.

Las cinco obras de Euclides que sobrevivieron hasta nuestra época han sido: Los Elementos, Los Datos, La División de Figuras, Los Fenómenos y La Optica. El libro más importante y de mayor influencia histórica fue claramente los Elementos.

Ahora bien, la opinión de los historiadores es que no se trataba de un compendio; es decir, no se trataba de una síntesis de los trabajos matemáticos previos a la época, sino que más bien era algo así como un libro introductorio, con la aritmética y la geometría elementales básicas disponibles.

Euclides nunca en este libro asumió o pidió crédito de originalidad, por lo que se supone que probablemente tomó muchos elementos de matemáticos anteriores o de la época; lo que esencialmente hizo fue una ordenación lógica y siguiendo un método que se le suele atribuir como algo original. El asunto es todavía más complejo si entendemos que este trabajo fue copiado posteriormente a Euclides y, posiblemente, los copistas añadieron cosas que no correspondían a la creación de Euclides; es decir, es seguro que no sabemos cuánto fue realmente de Euclides.

Los Elementos de Euclides fue el primer libro de texto que tuvo el mayor impacto en la historia de la humanidad. La primera versión impresa del libro apareció en el año 1482 en Venecia, uno de los primeros libros que se imprimió, y desde entonces se afirma que ha tenido más de mil ediciones. Hay quienes dicen que salvo la Biblia, probablemente, no existe otro libro que haya tenido tantas ediciones.

2.1 LOS POSTULADOS

Los antiguos griegos creyeron que los seres humanos podían reconocer inmediatamente ciertas verdades acerca de las propiedades geométricas de los objetos físicos y del espacio que nos rodea. Por ejemplo que al tener dos puntos es posible trazar una y solo una recta por ellos. O que el todo siempre es más grande que cualquiera de sus partes.

"Verdades" como las anteriores son las que se conocen como los famosos postulados y axiomas de la geometría clásica y que se encuentran en el libro Elementos de Euclides.

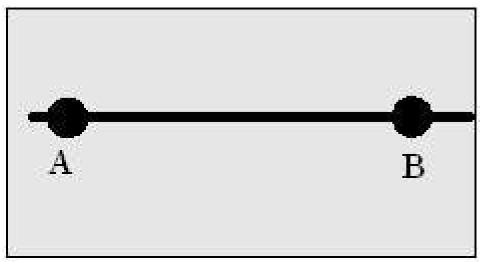
Los Elementos contiene trece libros o capítulos (aunque se le añadieron 2 libros más escritos por autores posteriores). Los primeros 6 son sobre geometría plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo sobre inconmensurables, y los tres últimos sobre geometría de sólidos. El libro empieza con 23 definiciones, dos de las cuales son:

- "un punto es lo que no tiene parte",
- "una recta es una longitud sin anchura".

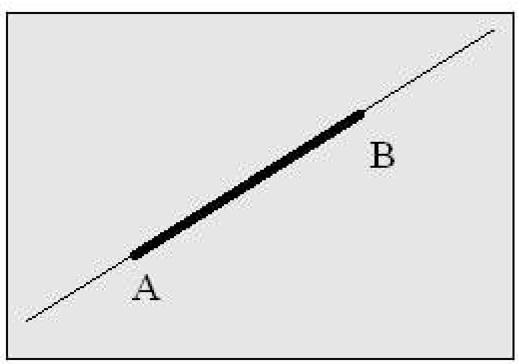
Los postulados de Euclides también se encuentran en el Libro I de los Elementos. Se suele hacer una distinción entre postulados y nociones comunes o axiomas.

Postulados

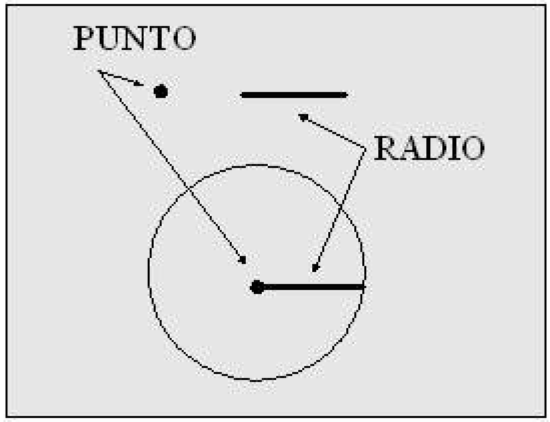
1. Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.



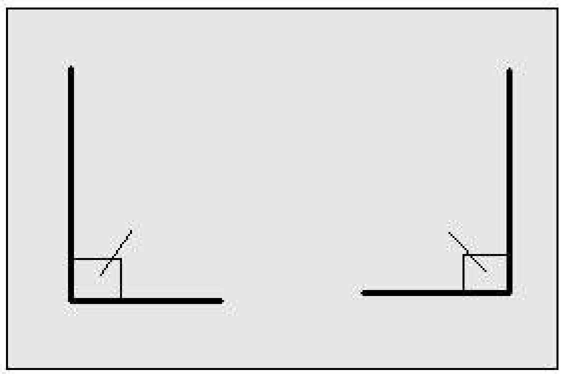
2. Es posible extender un segmento de recta continuamente a una recta.



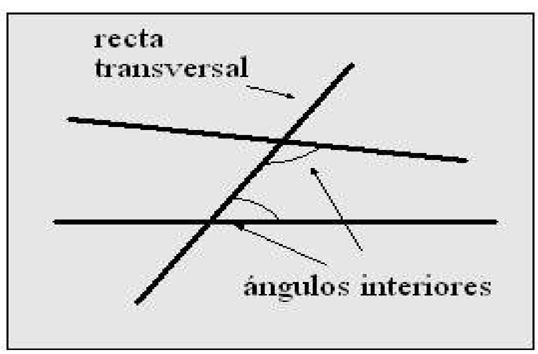
3. Es posible describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.



4. Que todos los ángulos rectos son iguales.



5. Que si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.



Nociones comunes

- 1. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
- 2. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
- 3. Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
- 4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
- 5. El todo es mayor que la parte.

Los dos primeros postulados son abstracciones derivadas de nuestra experiencia con una regla.

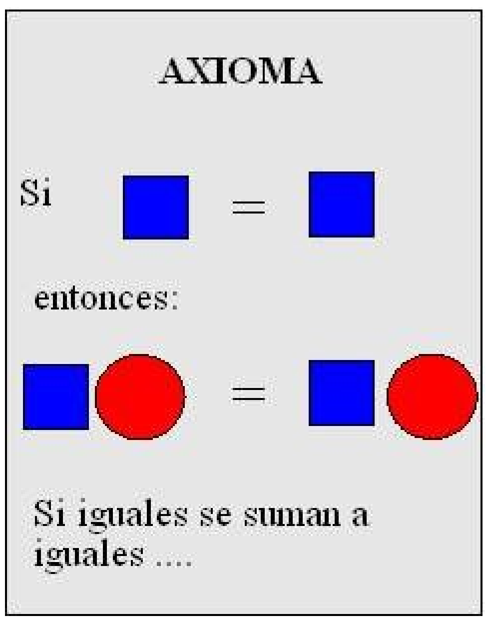
El tercer postulado se obtiene de nuestra experimentación con un compás.

El cuarto postulado es tal vez menos obvio y más abstracto, pero se deduce de nuestra experiencia midiendo ángulos con un transportador (donde la suma de ángulos suplementarios es 180, tal que ángulos suplementarios son congruentes entre sí).

La noción cuarta se refiere a la "superposición" de figuras y es geométrica en su carácter; por eso debería Euclides haberla colocado más bien como un postulado.

Los Elementos condensó el desarrollo lógico de la matemática de la época y tuvo que pasar más de 2 000 años para que se realizara una formulación más cuidadosa.

Para que se tenga una idea, el Libro I contiene los teoremas sobre congruencia de triángulos, construcciones elementales con regla y compás, desigualdades relativas de ángulos y lados en un triángulo, rectas paralelas, paralelogramos y demostraciones del teorema de Pitágoras y su recíproco.



El quinto postulado

El quinto postulado ha sido el controversial.

Es diferente de los otros porque no se puede verificar empíricamente si dos rectas se cortan, ya que solo podemos trazar segmentos y no las rectas completas.

Podemos extender los segmentos cada vez más lejos para ver si se cortan en algún punto, pero no se pueden extender infinitamente.

Con ese postulado, Euclides ofreció una formulación de este asunto fundamental que es el paralelismo.

Tiempo después se demostraría que este quinto postulado, tal y como lo planteó Euclides, es equivalente a afirmar que por un punto externo a una recta dada solo pasa una paralela.

Buscando paralelas

2.2 ¿AUTOEVIDENTES?

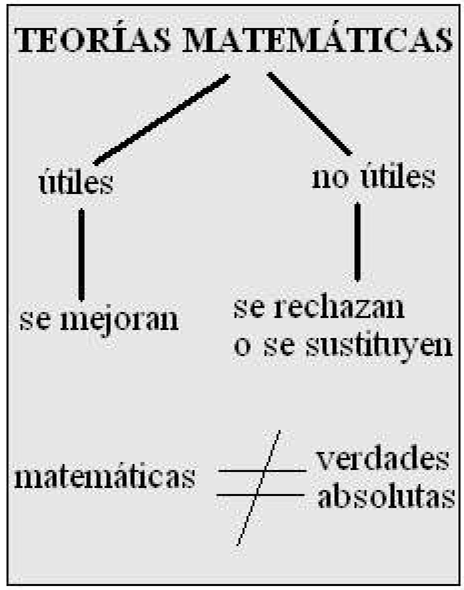
Pero volvamos a los postulados.

El gran filósofo de la Antigüedad griega Aristóteles había hecho una distinción entre postulados y nociones comunes o axiomas.

Los axiomas eran evidentes en sí mismos y comunes para todas las ciencias.

Los postulados eran menos evidentes.

Fue Proclus -tiempo después- quien llamó axiomas a las nociones comunes.



Es interesante notar que Aristóteles pensaba que los postulados aunque no tenían que saberse verdaderos, sin embargo, se debía probar su verdad demostrándose que las proposiciones deducidas de ellos coincidían con la realidad.

Proclus pensaba algo un poco diferente: toda la matemática era hipotética, es decir sin importar si sus deducciones eran o no verdaderas.

Aunque se supone que Euclides aceptó el criterio de Aristóteles, en su libro no hizo diferencia entre ambos tipos de proposiciones.

Lo decisivo para la historia del pensamiento fue que los matemáticos de las épocas posteriores asumieron los postulados y los axiomas como verdades incuestionables.

Y como los teoremas y proposiciones de esa geometría eran derivados de los axiomas, entonces, todo el edificio euclidiano no podía ser cuestionado.

El espacio real se consideró descrito por la geometría euclidiana y por sus axiomas y postulados.

Es decir, la geometría euclidiana describía perfectamente el mundo que nos rodea.

Nada ni nadie debía dudar de esta verdades sobre nuestra realidad.

Durante más de dos mil años esto fue así.

Sin embargo, aunque nadie dudaba de su verdad, el quinto postulado no parecía ser tan autoevidente como los demás.

2.3 PREGUNTAS

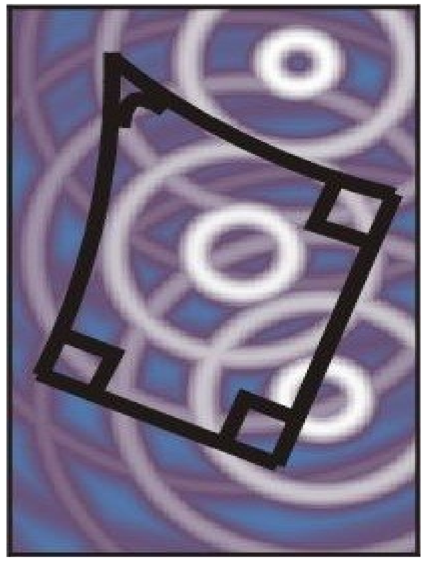
Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos capítulos contiene los Elementos de Euclides?
2. Enuncie los primeros cuatro postulados de Euclides.
3. Enuncie tres "nociones comunes" de Euclides.
4. Explique por qué el quinto postulado fue el más polémico a lo largo de la historia de las matemáticas.
5. Explique las diferencias que establecía Aristóteles entre postulados y axiomas.
6. Explique qué quiere decir "autoevidente".

   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta. Puede usar un diagrama para mostrar su punto de vista.

7. No se puede extender un segmento cualquiera a una recta en la geometría euclidiana.
8. En la geometría euclidiana es posible describir un círculo a partir de su radio.
9. La suma de dos ángulos rectos es en la geometría siempre 180 grados.
10. En la geometría euclidiana, el todo es siempre mayor que la parte.
11. El quinto postulado de Euclides era igualmente evidente que los otros postulados.

Capítulo III: El quinto postulado



Como hemos mencionado en el capítulo anterior, el problema se concentró en el quinto postulado. Y su historia es la de los múltiples esfuerzos por descubrir la naturaleza de la geometría y del mundo que nos rodea.

Mucho tiene que ver con las rectas paralelas, como las que usted puede ver en este techo:

3.1 DE EUCLIDES A SACCHERI

Dos fueron los tipos de esfuerzo que desarrollaron los matemáticos entre Euclides y el siglo XIX para abordar el problema del postulado quinto. Por un lado trataron de obtener un postulado similar que fuera más evidente. Por el otro lado, trataron de deducir el quinto postulado de los otros postulados y axiomas.

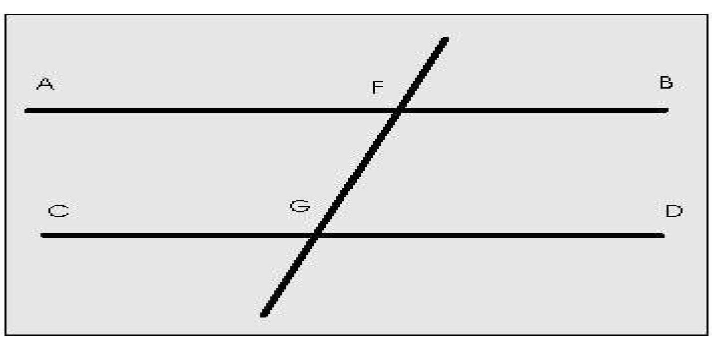
Ptolomeo

El primer intento fue hecho por el famoso astrónomo Claudio Ptolomeo, quien trató de deducir el quinto postulado de los otros 9 axiomas y postulados así como de los teoremas 1 al 28 de Euclides que no dependen del quinto postulado.

Claudio Ptolomeo (c. 85-165 d. C)

Es decir, trató de obtener otra colección de axiomas y que el quinto se desprendiera de los nuevos.

Sin embargo, Ptolomeo asumió sin darse cuenta que 2 líneas rectas no encierran un espacio y que si AB y CD son paralelas, entonces lo que sea válido para los ángulos internos en un lado de FG debe serlo también en el otro. Vea la figura.



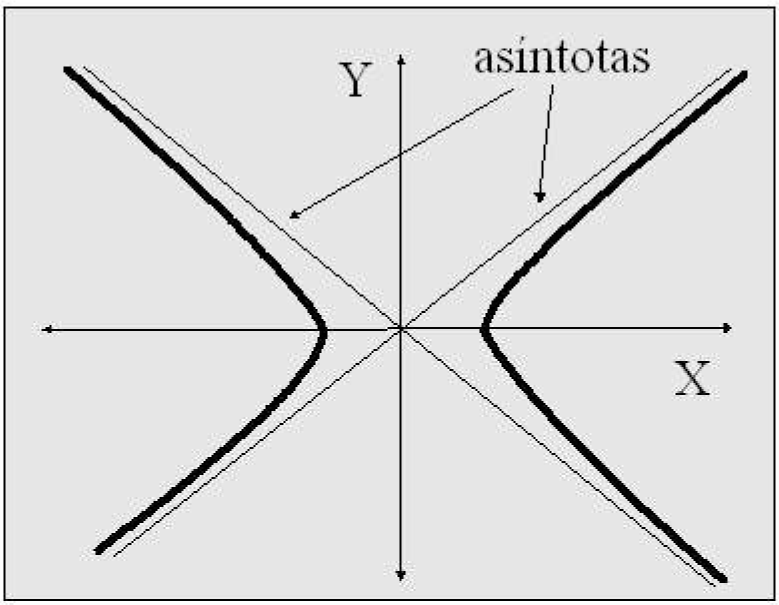
Proclus

Proclus en el siglo V d. C. (410-485 d. C) le restó validez al postulado y además señaló algunas inconsistencias en el trabajo de Ptolomeo. Dijo:

La afirmación que dos rectas convergen más y más conforme son producidas y entonces ellas se encontrarán en algún momento es plausible pero no necesaria.

Para demostrar su punto de vista dijo que la hipérbola se aproxima a su asíntota tan cerca como se quiera, pero nunca se tocan. Es decir: existen figuras geométricas que por más que se acercan no se cortan nunca. ¿Por qué tenían que cortarse las dos rectas en el caso del quinto postulado?

Proclus dio una prueba del quinto postulado pero basado en otro axioma, con lo que simplemente sustituyó un axioma por otro.



La hipérbola

Nasîr-Eddîn

Otra prueba fue dada por el persa Nasîr-Eddîn (1201-1274), editor de Euclides, cuya obra fue reproducida posteriormente por el inglés John Wallis (1616-1703). Wallis que criticó la prueba del persa, también ofreció la suya propia.

Wallis

Wallis escribió sobre esto en 1663 pero publicó su trabajo hasta 1693. Wallis propuso un nuevo axioma que pensó era más plausible que el de las paralelas (por medio de éste y el resto de axiomas probó el quinto postulado).

John Wallis (1616-1703)

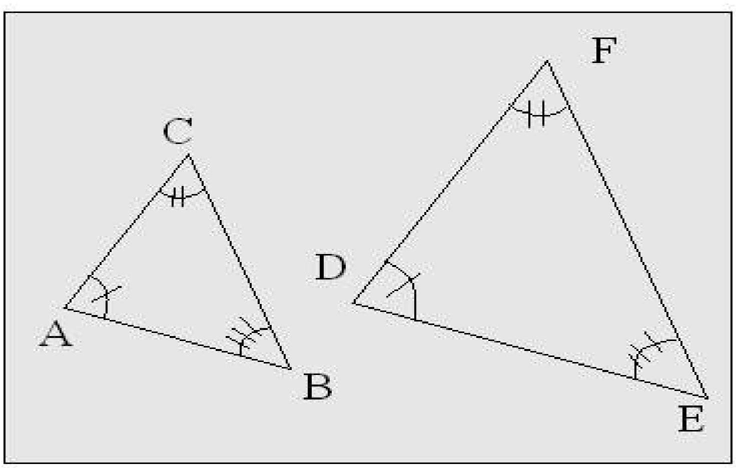
El postulado decía:

Dado un triángulo $\triangle ABC$ y dado un segmento $\overline{DE}$, existe un triángulo $\triangle DEF$ (con DE como uno de sus lados) que es semejante a $\triangle ABC$ (es decir $\triangle DEF \sim \triangle ABC$).

La idea intuitiva es que uno puede estirar o encoger un triángulo como uno quiera sin que haya distorsión.

El decía que el axioma de Euclides de que se puede construir un círculo con un centro y radio dados presupone que hay un radio arbitrariamente largo a nuestra disposición, por eso, uno puede igualmente asumir su análogo para figuras rectilíneas como un triángulo.

No hay razón para considerar el postulado de Wallis más plausible que el quinto de Euclides, puesto que resulta ser lógicamente equivalente a éste.



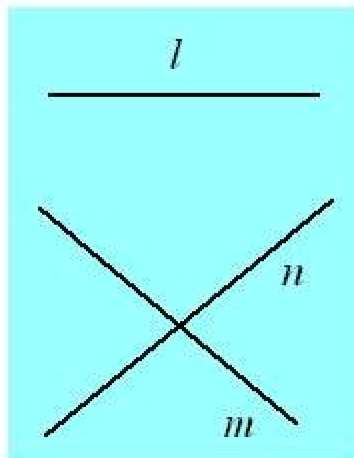
La formulación más conocida: el postulado de las paralelas

Joseph Fenn en 1769 sugirió una sustitución del postulado:

Dos rectas que se cortan no pueden ser paralelas a una tercera recta.

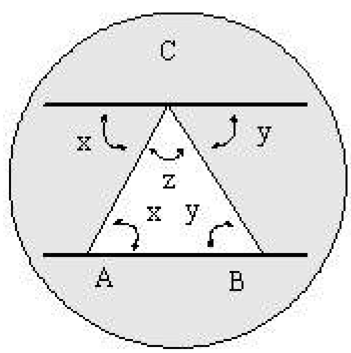
Al parecer este axioma había aparecido en la obra de Proclus.

El axioma dado por Fenn es equivalente al dado por el escocés John Playfair (1748-1 819), que constituye la versión más conocida del quinto postulado:



m y n no pueden ser las dos paralelas a l

A través de un punto exterior a una recta dada solo pasa una recta paralela a la recta dada.



x+y+z = 180 grados

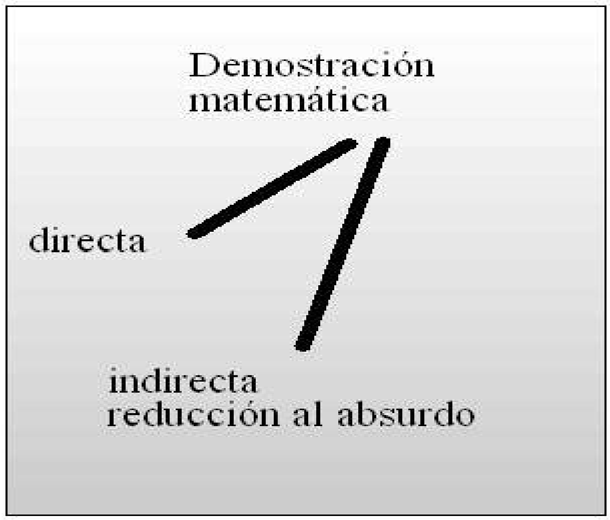
El gran matemático francés Legendre también trabajó durante 40 años alrededor del famoso postulado. Hizo pruebas del mismo, pero siempre se filtraba un axioma que era equivalente o igualmente complejo que el quinto postulado. Por ejemplo, probó que el quinto postulado era equivalente a:

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Métodos indirectos

El trabajo de Ptolomeo se puede ver también como un esfuerzo por deducir el quinto postulado de los otros. Este método y otros que se usaron podemos decir que fueron intentos de demostrar directamente que el quinto postulado se derivaba de los otros.

Pero no solo pruebas directas se ofrecieron, también se dieron indirectas. Es decir, se usaba una versión contraria al postulado con el propósito de demostrar que este conjunto nuevo de postulados con la versión contraria conducía a una contradicción.



Tipos de demostración

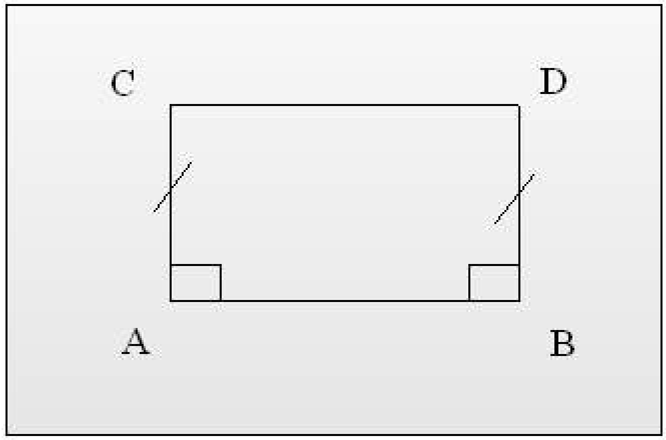
3.2 SACCHERI

El más famoso esfuerzo en esta dirección fue realizado por el italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), jesuita de la Universidad de Pavia.

Poco antes de morir Saccheri publicó un libro intitulado Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides liberado de todo error).

El procedió mas o menos así:

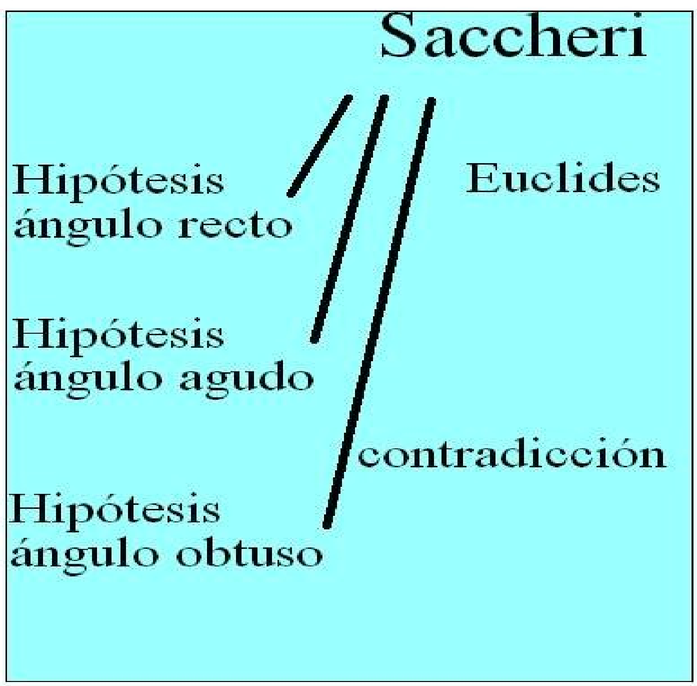
Construyó un cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{AC} = \overline{BD}$ donde los ángulos A y B son rectos.



Fácilmente se prueba que los ángulos C y D son iguales.

El postulado de Euclides es equivalente a decir que los ángulos C y D son rectos. Para demostrar eso Saccheri consideró dos alternativas contrarias:

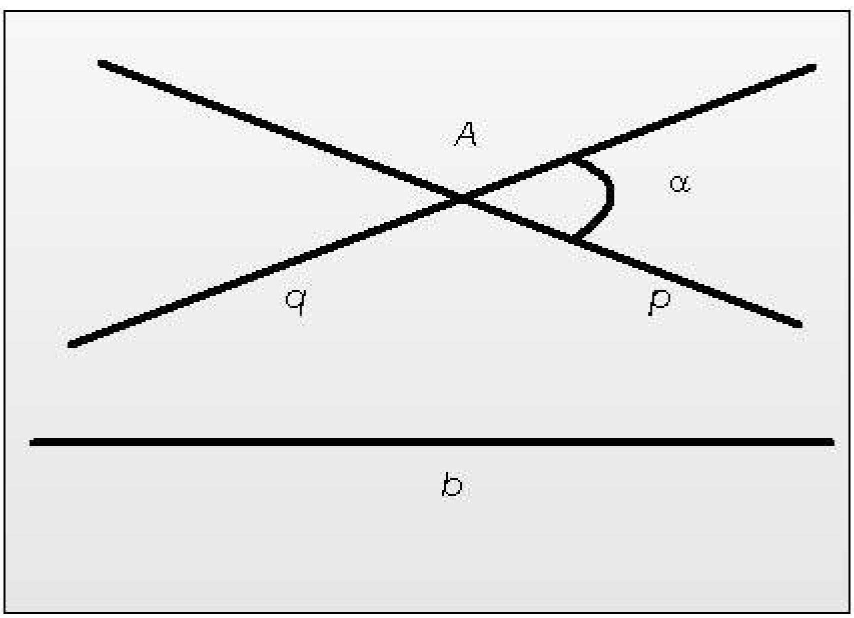
- que $\sphericalangle C$ y $\sphericalangle D$ fueran obtusos : la hipótesis del ángulo obtuso;
- que $\sphericalangle C$ y $\sphericalangle D$ fueran agudos: la hipótesis del ángulo agudo.



Con base en la primera hipótesis y los 9 axiomas restantes Saccheri encontró un contradicción: probó que los angulos C y D debían ser rectos (y esto no podía ser porque precisamente partía de que eran obtusos).

Hizo lo mismo con la hipótesis del ángulo agudo y llegó a resultados que consideró contradictorios con la naturaleza de las rectas, y concluyó entonces que el quinto postulado se derivaba de los otros. Sin embargo, la ``contradicción" que encontró no estaba tan clara y se refería más bien a la naturaleza de las rectas; es decir se refería a la idea sobre lo que una recta debía ser y no a una inconsistencia lógica.

Saccheri llegó al siguiente teorema: dados cualquier punto A y una recta b, sobre la hipótesis del ángulo agudo existe en el lapiz (familia) de rectas a través de A 2 líneas p y q que dividen el lapiz en 2 partes. La primera de éstas consiste de las líneas que intersecan b, y la segunda consiste de aquellas líneas (sobre el ángulo α) que poseen una perpendicualr común con b en algún lugar de b. Las líneas p y q son ellas mismas asintóticas a b. De este resultado y una argumentación extensa, Saccheri dedujo que p y b tendrían una perpendicular común en su punto común, que es en el infinito. Es esto lo que Saccheri consideró que no correspondía a la naturaleza de las rectas.



Saccheri dijo precisamente:

"La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque (es) repugnante a la naturaleza de la recta".

¿Qué quiere decir matemáticamente que algo es repugnante? O bien ¿cuál es la naturaleza de las rectas? Sobre esto se puede decir mucho y desde diversos puntos de vista ideológicos. Saccheri llegó a un formidable resultado pero no pudo obtener las conclusiones adecuadas debido al marco intelectual que usaba.

El problema de las paralelas siguió abierto durante muchos años más.

Tal era la trascendencia de este problema que el gran matemático francés d'Alembert lo consideraba como "el escándalo de los elementos de geometría".

La historia empezó a tener un signo diferente cuando se empezó a pensar que la geometría no tenía por qué corresponder con el mundo que nos rodea, y más todavía cuando se llegó a la idea que los axiomas euclidianos no eran verdades autoevidentes sino que estaban condicionados por nuestra experiencia sensorial. Pasó mucho tiempo, sin embargo, para que este tipo de visiones se desarrollara.

3.3 OTROS PRECEDENTES

Antes de la formulación definitiva de la geometría no euclidiana muchas otras personas analizaron esta situación y buscaron resolver el estatus del quinto postulado. Algunas de las ideas que se plantearon fueron muy importantes. Veamos algunas de ellas.

Klügel

Una de las primeras referencias en esta dirección la constituye el matemático alemán Georg Klügel (1739-1812), quien afirmó que Saccheri no había llegado a una contradicción sino que había llegado a resultados que no correspondían con la experiencia.

Klügel expresó dudas acerca de la posibilidad de demostrar el quinto postulado.

Lambert

El matemático suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777), en un libro escrito en 1766, y probablemente influenciado por Klügel, realizó un trabajo parecido al de Saccheri (con el cuadrilátero).

Pero a diferencia de Saccheri no concluyó que existía una contradicción al asumir la hipótesis del ángulo agudo. Más que eso, obtuvo algunos resultados matemáticos de interés.

La visión de Lambert se adelantó a su época.

Para él: una geometría podía ser válida siempre que fuera lógicamente consistente aunque no correspondiera con la realidad.

Schweikart

Un abogado alemán, dedicado a las matemáticas en sus momentos libres, Ferdinand Schweikart (1780-1859), también concluyó que existían dos geometrías: una la euclídea y la otra la que da al suponer que la suma de los ángulos de un triángulo no es dos ángulos rectos; esta última la llamó geometría astral, porque decía que se daba en el espacio de las estrellas.

Los teoremas de esta geometría eran los obtenidos por Saccheri y Lambert asumiendo la hipótesis del ángulo agudo.

Un sobrino de éste: Franz Adolf Taurinus (1794-1874), siguió estudios en esta geometría astral, y afirmó que era lógicamente consistente (es decir que no poseía contradicciones lógicas).

Todos estos matemáticos e intelectuales reconocieron la existencia de la geometría no euclidiana, pero ninguno llegó a la conclusión radical de que la geometría euclidiana no era la única que podía describir aspectos de la realidad. Cronológicamente, fue Carl Gauss el primero en dar este paso.

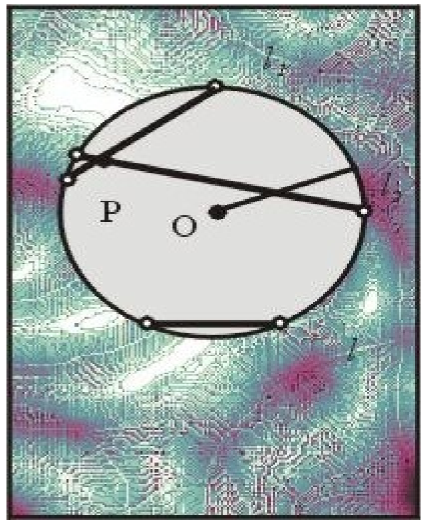
3.4 PREGUNTAS

Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Quién hizo el primer intento por deducir el quinto postulado de otros?
2. ¿Para qué Proclus ofreció el ejemplo de una hipérbola? Redacte su explicación.
3. ¿Qué fue lo que hizo Playfair con relación al quinto axioma de Euclides?
4. ¿Quién fue Gerolamo Saccheri? ¿De qué país provenía y en cuál siglo vivió?
5. ¿Qué significa en matemáticas un método de prueba indirecta?
6. ¿En qué se diferenciaba la opinión del matemático Lambert de la de Saccheri en torno a los similares resultados que obtuvieron?
7. Trate de comprobar la equivalencia del quinto postulado con el hecho que los ángulos suman 180 grados.

   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
8. John Wallis reprodujo la obra de Nasîr-Eddîn sobre Euclides.
9. John Playfair fue quien estableció el axioma: "Dos rectas que se cortan no pueden ser paralelas a una tercera recta".
10. Saccheri hizo una demostración indirecta del postulado cuarto de Euclides.

Capítulo IV: Las nuevas geometrías



Hemos llegado al momento decisivo en la historia de la geometría no euclidiana.

Después de centenares de años de intentos por demostrar el quinto postulado deducido de los otros postulados o de sustituirlo por otros más sencillos, los geómetras cortaron el nudo gordiano. Construyeron un nuevo marco teórico que revolucionaría (con el tiempo) la percepción de las matemáticas.

Es interesante señalar que la construcción de estos resultados se dio en la primera mitad del siglo XIX, que fue un periodo decisivo en la creación de la sociedad moderna. A finales del siglo anterior se había dado la Revolución Francesa con su cortejo de implicaciones para la historia. Varios cambios en la percepción del mundo se habían provocado.

El nuevo momento establecía también un contexto social y cultural para la aceptación de una nueva manera de ver la geometría y las matemáticas en general.

4.1 GAUSS Y LA NUEVA GEOMETRÍA

Gauss al igual que el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), y el húngaro János Bolyai (1802-1860), crearon independientemente las geometrías no euclidianas. Gauss se adelantó en el tiempo a los otros matemáticos, pero no publicó sus resultados.

Carl Friedrich Gauss nació en 1777 en la ciudad alemana de Brunswick, y se educó en la Universidad de Göttingen. Gauss produjo resultados del más alto nivel en casi todos los campos de las matemáticas puras y aplicadas. Su trabajo le valió el título de "Príncipe de los matemáticos", y es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Los esfuerzos de Gauss en la geometría no euclidiana empezaron desde 1792, cuando tenía 15 años, cuando le habría dicho a su amigo Schumacher que tenía la idea de una geometría válida sin el quinto postulado euclidiano. No obstante Gauss pasó varios años tratando de deducir el postulado a partir de otros.

En 1799 Gauss le escribió un carta al matemático húngaro Wolfgang Farkas Bolyai (1775-1856) en la que le expresaba su opinión: no se podía deducir el quinto postulado de los otros postulados euclidianos, y empezó a prestarle mucho cuidado a la existencia de geometrías sin ese postulado válidas y también aplicables a la realidad.

A partir de 1813 Gauss trabajó en la nueva geometría que llamó primero anti-euclidiana, luego astral y finalmente no euclidiana. Gauss llegó a la conclusión que no podía probarse que los resultados de la geometría euclidiana fueran autoevidentes y su verdad necesaria, lo que sí sucedía -en su opinión- con la aritmética..

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

La geometría es empírica

Para Gauss la aritmética era a priori, es decir su verdad se establece sin recurrencia alguna al mundo que nos rodea. La mecánica, contrariamente, no es a priori y exige la recurrencia a la realidad y sus proposiciones pueden ser modificadas de acuerdo a la experiencia. Gauss llegó a la conclusión que la geometría se parecía más a la mecánica que a la aritmética.

Gauss incluso trató de mostrar la aplicabilidad de la nueva geometría: midió los ángulos del triángulo formado por tres montañas Hohenhagen, Brocken y Inselsberg para intentar demostrar que esta suma era superior a los 180 grados. No pudo concluir nada porque el margen de error hacía imposible que el resultado fuera fiable.

4.2 BOLYAI Y LOBACHEVSKY

Lobachevsky

Nikolai fue hijo de un modesto funcionario del gobierno ruso, quien murió cuando el niño tenía 7 años.

Nikolai Lobachevsky (1793-1856)

A los 21 años empezó como profesor de la Universidad de Kazán de la que llegó a ser rector en 1827. Presentó en 1826 su aproximación en torno a la nueva geometría, pero este trabajo se perdió. Posteriormente publicó sus trabajos en Kazan, y también en el Journal für Mathematik. El primer ensayo se llamó "Sobre los fundamentos de la geometría" (1829-1830) y un segundo trabajo: "Nuevos Fundamentos de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas". (1835-1837). El llamó su geometría primeramente imaginaria y luego pangeometría.

Bolyai

János Bolyai era hijo de un profesor húngaro de matemáticas de provincia: Wolfgang (Farkas) Bolyai, quien fue amigo de Gauss. Farkas había tratando de demostrar el postulado de las paralelas la mayor parte de su vida. Cuando supo que su hijo estaba interesado en el asunto lo advirtió radicalmente:

"Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorver todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida"

En 1832-1833, János publicó "Ciencia absoluta del espacio" como apéndice en un libro de su padre: Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducenci (Intento de introducir la juventud estudiosa en los elementos de Matémáticas Puras). Aunque publicó más tarde que Lobachevsky, Bolyai había trabajado las geometrías no euclidianas por lo menos desde 1823.

Tanto Gauss, Lobachevsky, como Bolyai concluyeron que el postulado euclidiano de las paralelas no se podía probar como deducción de los otros 9 postulados y axiomas de la geometría euclidiana, y que un postulado adicional era necesario para fundamentar esta geometría.

János Bolyai (1802-1860)

Puesto que el postulado de las paralelas era un hecho independiente, se justificaba (lógicamente) la adopción de una proposición contraria a ese axioma. Se trataba entonces de deducir las consecuencias de un nuevo sistema donde se incluyera el nuevo axioma (contrario al de las paralelas).

4.3 PRIORIDAD Y SENTIDO HISTÓRICOS

Como fue Lobachevsky el primero en publicar su obra, se le suele tomar como el padre de la geometría no euclidiana. Pero, como hemos visto, las cosas son más complejas.

No es difícil imaginar que se dio una polémica acerca de la prioridad histórica de los resultados. Gauss al leer en 1832 el artículo de János escribió a su padre diciéndole que no podía aplaudir ese trabajo porque de hacerlo sería aplaudir su propio trabajo (de Gauss). Similamente Bolyai pensó que Lobachevsky le había copiado su trabajo.

La realidad es que el tema estaba en el ambiente matemático de la época y no debe parecer extraño que varios matemáticos llegaran a conclusiones similares. Para empezar, varios trabajos fueron precedentes: Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus; Gauss, Lobachevsky y Bolyai tuvieron acceso a o referencia de ellos.

No está de sobra mencionar, sin embargo, que hubo una conexión entre Gauss y Bolyai, así como Gauss y Lobachevsky. En el primer caso, la amistad de Gauss con Wolfgang, el padre de János Bolyai, ofreció por lo menos la oportunidad a János de conocer los puntos de vista de Gauss. En el segundo caso, resulta que Lobachevsky fue discípulo de otro amigo de Gauss: Johann Martin Bartels (1769-1836) quien estuvo al tanto de las ideas de Gauss.

Es decir, tanto Bolyai como Lobachevsky tuvieron contacto con Gauss vía amigos cercanos del gran matemático alemán. Lo menos que puede decirse es que, al margen de los resultados técnicos propios, estos matemáticos estaban al tanto de las opiniones y los enfoques gaussianos en torno a la geometría.

Una revolución

Históricamente la geometría no euclidiana constituía una auténtica revolución. Sin embargo, su influencia en la comunidad matemática tomó su tiempo. Gauss no publicó sus resultados y Lobachevsky y Bolyai no provenían de los países ``importantes'' en la ciencia de la época.

Lobachevsky publicó primero en ruso y los rusos que lo leyeron fueron muy severos con su trabajo (fue hasta 1840 que Lobachevsky publicó en alemán).

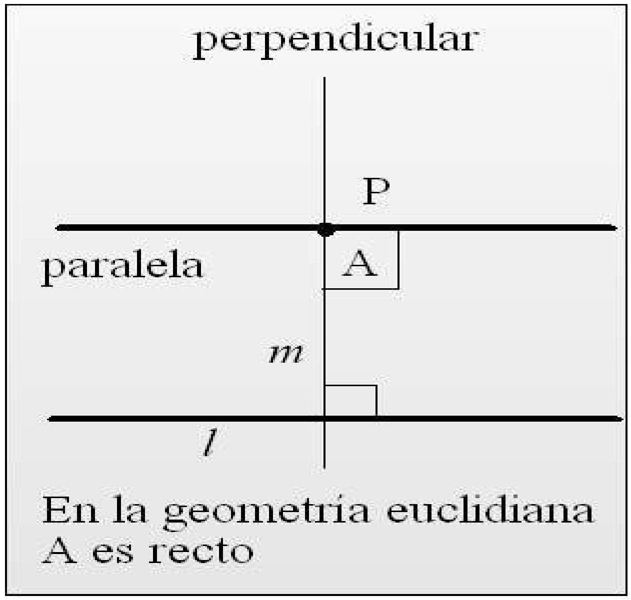
Dos cosas más deben mencionarse: por un lado, durante esa época la geometría de moda era la proyectiva, y, por otra parte, los matemáticos no se sentían cómodos con ideas radicalmente nuevas.

Después de la muerte de Gauss, en 1855, se publicó sus trabajos incluyendo notas y correspondencia en torno a la geometría no euclidiana. Esto hizo que se le pusiera atención al tema. Los trabajos de Bolyai y Lobachevsky fueron mencionados en 1866-1867 por el matemático Richard Baltzer (1818-1887) y poco después se fue tomando conciencia de la trascendencia de la nueva geometría.

La geometría que desarrollaron asumió que por un punto exterior a una recta pasan un número infinito de rectas paralelas a la dada (es decir que no poseen puntos de intersección). Esto se derivaba de la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri.

De hecho, es con dos paralelas que trabajó Lobachevsky:

Existen dos rectas paralelas a una dada que pasan a través de un punto que no está en la recta dada.

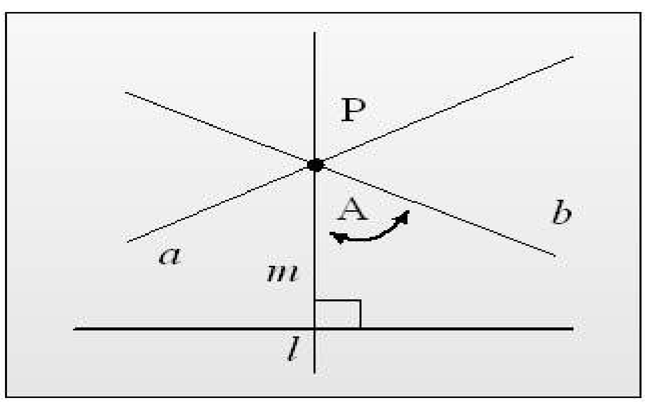


La geometría así desarrollada incluía algunos de los resultados de la geometría euclidiana puesto que asumía todos los otros axiomas salvo el quinto. Y, por supuesto, contenía otros totalmente diferentes.

Dos paralelas y una perpendicular

Considere un punto P exterior a la recta dada l, a y b rectas paralelas a l.

Considere ahora una recta m perpendicular a l y que pasa por P.



Dos paralelas y una perpendicular

El ángulo A en la geometría euclidiana sería de 90 grados. Pero en la nueva geometría éste ángulo es más bien agudo. Y lo que es más sorprendente es que el ángulo A depende de la longitud de la perpendicular m. Si m es más corto, el ángulo A se hace más grande. Conforme m se acerca a 0 el ángulo A se acerca a 90 grados. En la geometría euclidiana un ángulo no cambia de tamaño si cambian de longitud los rayos o segmentos que le dan origen.

Otro resultado:

La suma de lo ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. Y, más aún, si el área del triángulo disminuye entonces aumenta la suma. Se acerca a 180 cuando el área del triángulo se acerca a 0.

El matemático Lambert ya había notado que en la nueva geometría la suma de los ángulos de un triángulo aumentaba conforme el área del triángulo decrecía.

4.4 ALGUNAS IMPLICACIONES

La construcción de la geometría no euclidiana revela varias características de las matemáticas y de las ciencias en general.

1. El sentido social de la ciencia y de las matemáticas

Los conceptos y métodos matemáticos, en general, no son el producto de una o dos mentes aisladas. Varios científicos aportaron sus resultados creando un terreno fértil para dar pasos más decisivos y ambiciosos. Ahí estaban Sacchieri, Lambert, Schweikart y muchos otros que durante siglos trabajaron el postulado de las paralelas para buscar una mejor comprensión de la geometría.

Así funciona la ciencia, es posible ver hacia adelante pero siempre sobre los hombros de muchos otros. Las influencias de unos sobre los otros son claras. Eso sí: los caminos son muchos dependiendo de la época y las circunstancias.

Hoy en día a partir de las revistas especializadas, el correo electrónico o las reuniones científicas constantes este tipo de procesos es más evidente. En siglos pasados, la correspondencia personal o el viaje itinerante de unos científicos lograba la comunicación y el intercambio social y colectivo de ideas y opiniones. La construcción científica es un hecho histórico, social y colectivo.

2. Varios factores sociales

Si lo anterior nos lleva a tener que considerar las contrucciones de las ciencias como resultados complejos con la participación de muchos, la geometría no euclidiana también es un ejemplo de cómo en la construcción matemática intervienen los factores no matemáticos, opiniones y percepciones ideológicas.

Saccheri se detuvo y creyó que había reivindicado a Euclides, al ver una contradicción sobre lo que pensaba era la naturaleza de la geometría. La "contradicción" a la que le condujo la hipótesis del ángulo agudo no era lógica sino ideológica. Un siglo después, el contexto social e ideológico permitió otro resultado. La "contradicción" podía ser vista no como una contradicción sino como una proposición válida, que se podía sostener perfectamente. Para Saccheri la geometría euclidiana (con todos sus postulados y axiomas) era autoevidente, su verdad era necesaria, y describía el mundo que nos rodea. Suponer el postulado quinto falso y no llegar a una contradicción o encontrar una geometría que violase nuestra percepción de la realidad era impensable.

Admitir que una nueva geometría no euclidiana podía ser lógicamente válida constituyó un paso hacia adelante. Pero más lejos fue Gauss: asumió que no solo era una geometría válida en términos lógicos sino que ésta podía explicar o describir partes de nuestra realidad. Evidentemente, el nuevo contexto ideológico y social así como el desarrollo mismo de las matemáticas y de las otras ciencias hacía posible sostener este tipo de ideas.

Gauss asumió la geometría como basada en la experiencia empírica al igual que la mecánica y la aritmética como conocimiento a priori compuesto de verdades autoevidentes y necesarias. Esta última apreciación era también ideológica y sería común a otros matemáticos y lógicos del siglo XIX.

3. Pleitos

No ha sido extraño, por la naturaleza colectiva y social de las matemáticas y la ciencia, la existencia de malentendidos, rivalidades, debates y hasta odios encontrados entre miembros de una comunidad científica.

4. Inercia y temor

Es interesante que resultados de tanta trascendencia teórica no hayan tenido el impacto inmediato en la comunidad matemática de la época. No solo se trataba de la ausencia de medios de comunicación, también pesaban hechos como que la comunidad matemática se inclinaba por estudiar otras cosas: la geometría proyectiva o los fundamentos del Cálculo Diferencial e Integral por ejemplo; o, también pesaba, la inercia y conservadurismo de la comunidad matemática para aceptar resultados tan revolucionarios.

5. Individuo y colectividad

Si Gauss hubiera publicado sus resultados habría permitido un desarrollo más pronto y, probablemente, más amplio y profundo en la comunidad matemática, capaz de nutrir o redirigir el curso de la investigación matemática de la época. Esta es la dialéctica entre lo colectivo y lo individual: la matemática será colectiva y social en muchas de sus dimensiones, pero el papel del individuo es tan importante como para poder cambiar el curso de la historia si las circunstancias lo colocan en el lugar indicado.

4.5 PREGUNTAS

Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿De qué país era Lobachevsky?
2. ¿Por que Gauss decía que la geometría se parecía más a la mecánica?
3. ¿Quién fue Wolfgang Bolyai?
4. ¿Por qué decimos que tanto Bolyai como Lobachevsky estuvieron "al tanto de las opiniones y los enfoques gaussianos en torno a la geometría"?

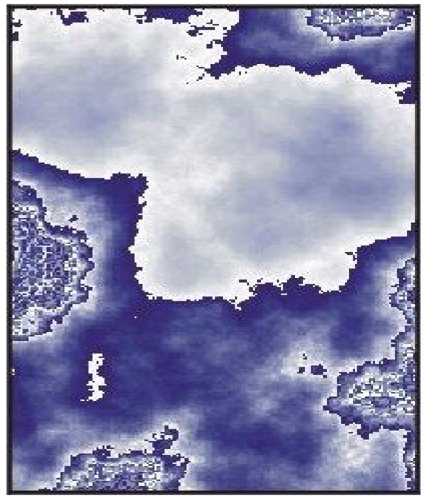
   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

5. Gauss desarrolló sus trabajos fundamentales en la ciudad suiza de Zürich.
6. Para Gauss la aritmética era como la mecánica.
7. Bolyai pensó que Lobachevsky había copiado su trabajo sobre las geometrías no euclidianas.

   Comente:

   "Los conceptos y métodos matemáticos, en general, no son el producto de una o dos mentes aisladas. (...) Así funciona la ciencia, es posible ver hacia adelante pero siempre sobre los hombros de muchos otros. Las influencias de unos sobre los otros son claras. Eso sí: los caminos son muchos dependiendo de la época y las circunstancias".

Capítulo V: Desarrollos Posteriores



Las geometrías no euclidianas tuvieron un impacto en la historia de las matemáticas pero también de la física y la ciencia en general. Piense las implicaciones que podía tener el que la geometría euclidiana no correspondiera necesariamente con la realidad. Si algo que se creía verdadero y absolutamente seguro por más de 2000 años ya no lo era ¿qué pasaría con las cosas menos verdaderas, el resto de las cosas? ¿Sería posible obtener teorías científicas verdaderas o el ser humano está condenado a la ignorancia y la incertidumbre?

¿Qué pasaría con los puentes y edificios construidos con base en esa geometría? ¿Y las medidas de los terrenos? ¿Significaba que se iban a caer las edificaciones o que había que repartir las fincas de otras manera?

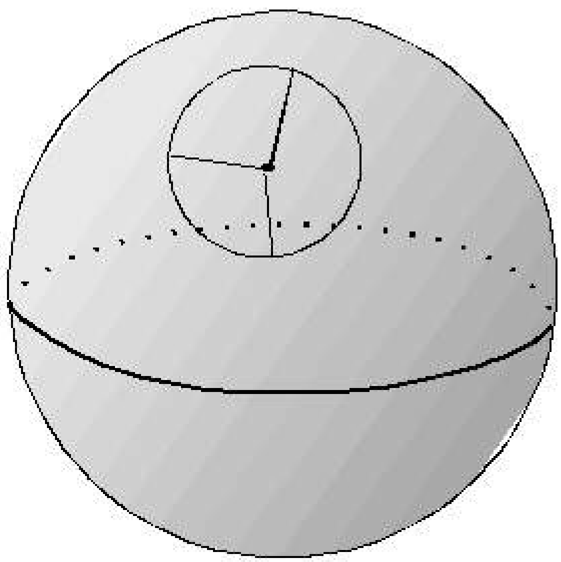
Nuestra historia posee más capítulos. Por ejemplo: su influencia en la gestación de la teoría de la relatividad de Albert Einstein, que revolucionaría la física moderna. Así que aquí vamos a seguirle la pista a las nuevas geometrías.

5.1 RIEMANN

Las geometrías no euclidianas no serían plenamente integradas a las principales líneas del desarrollo de las matemáticas hasta el trabajo realizado por el alemán Georg Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann fue el hijo de un pastor luterano, aunque nació enfermizo poseía una inteligencia precoz. Fue estudiante de Gauss en la Universidad de Göttingen y luego logró ser profesor de esa prestigiosa institución alemana.

Georg Bernhard Riemann
(1826-1866)

Riemann contribuyó directamente a la generación de nuevas geometrías de una forma muy amplia.Una recta esférica es un círculo grande. No posee principio ni fin. Es ilimitada, pero no es infinita.



Sobre la esfera.

No hay paralelas

Al igual que Gauss, Bolyai y Lobachevsky asumió un postulado contrario al quinto de Euclides. Pero en lugar de asumir que existe un número infinito de rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada, asumió que no pasaba ninguna. Para Riemann, estaba en mayor acuerdo con la realidad el que no existiera ninguna recta paralela. Es decir, si se extendieran las rectas tarde o temprano se cortarían.

Esta era la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.

Pero Riemann no se quedó ahí. Saccheri había combinado este axioma (dos rectas se cortan) con los otros 9 euclídeos, mientras Riemann propuso un cambio adicional. Si era válido dudar del quinto postulado ¿por qué no era posible dudar de los otros?. Eso hizo con relación al segundo postulado.

Recordemos que en la geometría euclidiana:

"Es posible extender un segmento de recta a una recta".

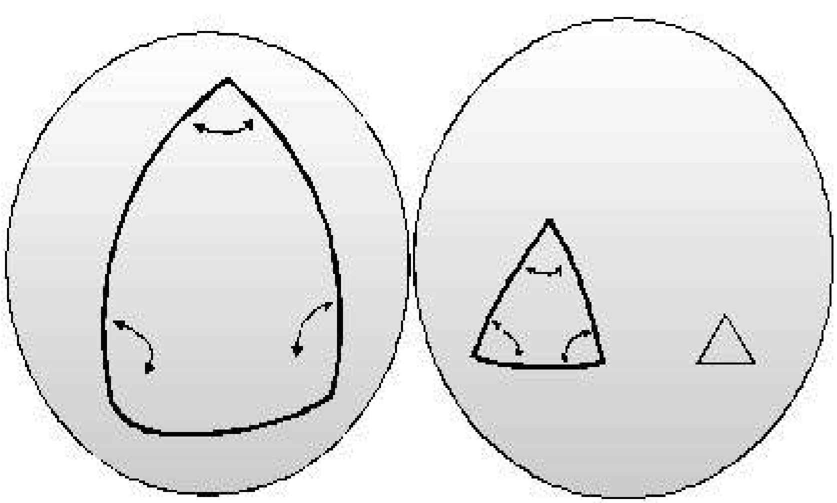
Es decir, de un segmento podemos obtener un recta infinita. Riemann pensó que lo que realmente podemos garantizar no es una recta infinita, sino más bien que el proceso de extender un segmento no posee fin. Hizo una distinción muy sutil entre entre longitud infinita y longitud ilimitada o inacabable. Por ejemplo: uno puede recorrer un círculo ilimitadamente pero el círculo posee una longitud finita. De esta manera, Riemann enfatizó una dimensión especial del concepto de recta; éstas aquí no son longitudes infinitas sino ilimitadas.

Armado con la reformulación de estos dos nuevos postulados creó una nueva geometría no euclidiana.

Como usaba postulados euclidianos, al igual que con las otras geometrías no euclidianas, obtenía resultados euclidianos; como, por ejemplo, el criterio de congruencia de triángulos $L-L-A$.

Por supuesto, también resultados no euclidianos, por ejemplo:

- La suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor de 180 grados.
- Esta suma, además, varía de acuerdo al tamaño del triángulo. Conforme hacemos el triángulo de menor área, la suma se hace más pequeña, cercana a 0 cuando el área tiende a 0.



Otro resultado:

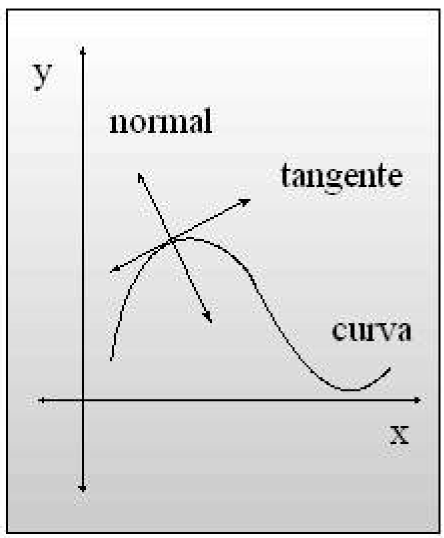
- Dos triángulos semejantes son congruentes.

Esto sucede también en la geometría de Lovachevsky.

Este es el tipo de geometría con el que nos familiarizaremos en el siguiente capítulo, a través de una representación de la misma.

La geometría diferencial

Riemann hizo más que crear una nueva geometría: colocó a las geometrías no euclidianas en un marco teórico más general. Ya no se trataba de que se cumpliera el postulado de las paralelas o no, Riemann preconizaba un cambio de visión total sobre la geometría. Para Riemann la geometría ya no debía ser sobre puntos o las rectas del espacio como solemos conocerlo, la geometría debía tratar de lo que se llama variedades. Vamos a ver algunos aspectos de esta historia.



Gauss había realizado mucho trabajo en la construcción de mapas y la llamada geodesia. Y de aquí se engendraría un nuevo enfoque sobre el sentido del espacio.

El asunto tiene que ver con el Cálculo Diferencial e Integral, creado por Newton y Leibniz en el siglo XVIII. El concepto clave es el de "geometría diferencial" (término llamado así por primera vez por Luigi Bianchi, 1856-1928, en 1894).

Este tema se podría definir como el estudio de las propiedades de las curvas y superficies que varían de un punto a otro. Cuando se da este tipo de variación (de punto en punto) se utiliza las técnicas del Cálculo. Se trataba de una temática que nacía del desarrollo del Cálculo pero que tenía importantes implicaciones en la geometría misma.

Para que se tenga una idea: el cálculo de rectas normales o tangentes, puntos de inflexión (de cambio de concavidad), curvaturas, serían los asuntos de la geometría diferencial en un plano.

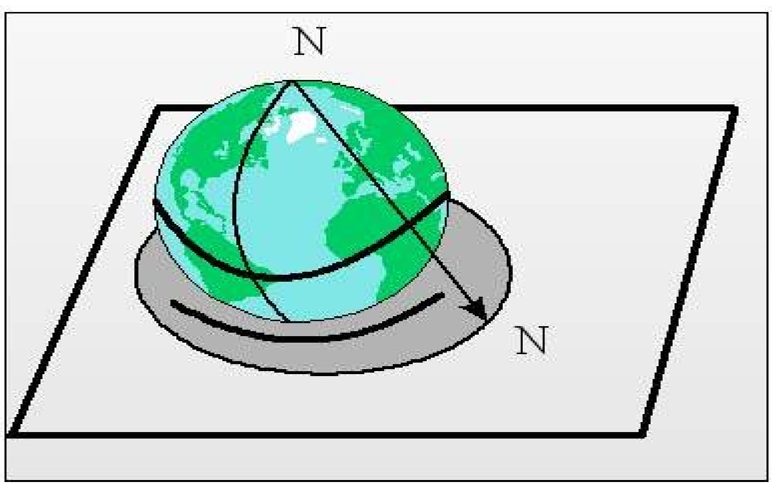
Los mismos asuntos se pueden estudiar en el espacio de tres dimensiones.

Todos estos asuntos tenían una importancia vital en física, mecánica y en la confección de mapas.

Por ejemplo, consideremos el problema de representar en un plano (una hoja) la esfera; lo cual sería parecido a poner en un mapa el planeta Tierra.

Era claro desde antes del siglo XVIII que esto no se podía hacer preservando las propiedades geométricas de la esfera en el plano (de la Tierra en el mapa). Pero sí hay algunas propiedades geometricas que sí se preservan en esta representación en el plano. Por ejemplo, los ángulos.

En efecto, el interés se volcó durante muchos años hacia las representaciones que permitían preservar los ángulos de las curvas consideradas. J. H. Lambert, Euler, Lagrange y muchos otros matemáticos del siglo XVIII buscaron avanzar en estos temas tan apreciados para la cartografía.

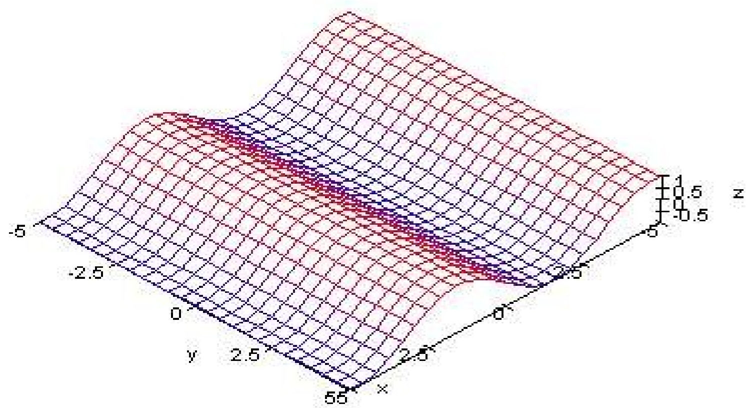


De la esfera al plano.

La superficie como espacio

En 1827, Gauss escribió su formidable artículo sobre la geometría diferencial en las superficies: Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas (Investigaciones generales sobre superficies curvas). Aquí dio Gauss una nueva idea que sería usada por Riemann: una superficie se podía ver como un espacio en sí mismo.

En 1854, Riemann dio una conferencia en Göttingen para optar a la categoría de Privatdozent (profesor). Gauss, quien le había dado a Riemann como tema de estudio los fundamentos de la geometría, estuvo presente. El trabajo sin embargo no fue publicado sino hasta 1868 y fue intitulado Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Acerca de las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría).



$y = sen\, x$ **en el espacio de tres dimensiones**

La geometría euclidiana es empírica

Riemann al igual que Gauss asoció geometría con mecánica, pero fue más lejos que Gauss. Riemann trató de demostrar que los axiomas específicos de Euclides eran empíricos y no autoevidentes y necesarios en sí mismos al margen de la experiencia.

Su estrategia fue buscar qué era lo realmente a priori en la geometría del espacio y estudiar sus consecuencias. Cualesquiera otras propiedades del espacio no eran a priori y entonces serían de naturaleza empírica. Es decir, ver lo realmente necesario y autoevidente, y una vez resuelto esto hacer ver que lo que quedaba fuera solo podía ser empírico.

Por pedazos

En su investigación Riemann concluyó que para estudiar el espacio debía hacerse localmente y no como un todo. Es decir, se debía analizar el espacio por pedazos. No se podía dar resultados aplicables para todo el espacio. Esto era precisamente lo que hacía la llamada geometría diferencial al estudiar las propiedades de las curvas y superficies en el espacio.

Usando bastantes resultados de Gauss en la geometría de las superficies en un espacio euclidiano, Riemann generalizó este tipo de resultados.

Una variedad diferencial era precisamente uno de esos pedazos a estudio. Habló entonces de una geometría de n dimensiones (aunque el caso de mayor interés era el de tres dimensiones).

Una variedad está compuesta por puntos con n coordenadas. $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$; en 3 dimensiones los puntos son de la forma (x_1, x_2, x_3).

El conjunto de puntos forma una variedad.

Las variedades eran el concepto más general y éstas poseían un conjunto de propiedades aplicables a cualquier variedad. Este conjunto era las propiedades necesarias y autoevidentes que Riemann andaba buscando.

Espacio físico como ejemplo de variedad

Riemann demuestra que el espacio físico es un caso específico de variedad y, entonces, concluye que la geometría del espacio no puede ser deducida del conjunto de propiedades generales de las variedades.

William Clifford (1845-1879)

Para Riemann estas propiedades que distinguen el espacio físico de otras variedades de tres dimensiones deben ser obtenidas por medio de la experiencia. Puesto de otra forma: la experiencia es la que debe decidir si las propiedades específicas que sintetiza la geometría euclidiana corresponden a la realidad o no.

Los axiomas de la geometría euclidiana pueden corresponder o no con la realidad que nos rodea. Descubrir eso, decía Riemann, no es un asunto para la geometría sino para la física.

Una nueva visión del espacio

Esto planteaba una visión del espacio muy diferente de la que incluso hoy en día nos resulta natural. El matemático inglés William K. Clifford afirmaba las siguientes propiedades del espacio físico que probablemente coincidirían con las de Riemann:

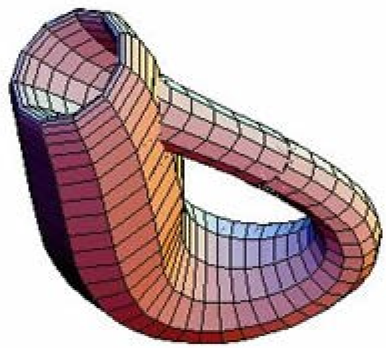
- El espacio es una superficie en promedio plana pero donde existen unas pequeñas porciones que son como pequeñas colinas.
- Esta propiedad de ser curvo o distorsionado se pasa de una porción del espacio a otra como hace una onda.
- La variación de la curvatura del espacio es lo que pasa en el movimiento de la materia.
- En este mundo físico esta variación es lo único que se da, además de la ley de la continuidad.

La conclusión que se obtiene frente a un espacio que cumpla lo anterior es muy importante. Se trata de un espacio donde la curvatura varía de lugar en lugar y, debido al movimiento de la materia, la curvatura cambia también de tiempo en tiempo. Es decir: hay variación debida al espacio y al tiempo. Es imposible que las leyes de la geometría euclidiana se puedan aplicar en un espacio así concebido.

Entonces, la conclusión es muy fuerte: la geometría euclidiana no es la geometría del espacio que nos rodea.

Esto es un resultado maravilloso. Estudiar el espacio debe hacerse tomando en cuenta estas colinas y honduras.

La asociación entre espacio y materia, que señalamos en Clifford y Riemann, condujo en la dirección de la teoría de la relatividad.



La Botella de Klein es una superficie que posee una sola cara. Extraño ¿no es cierto?

5.2 DE RIEMANN A KLEIN

Después de la muerte de Riemann en 1868, varios matemáticos siguieron estas líneas de trabajo ampliando los resultados: Eugenio Beltrami (1835-1900), Elwin Brunno Christoffel (1829-1900) y Rudolph Lipschitz (1832-1903).

Eugenio Beltrami (1835-1889)

Curvatura

El segundo concepto más importante usado por Riemann en 1854 fue el de curvatura de una variedad. A través de este concepto Riemann trató de caracterizar el espacio euclidiano y, de manera más general, los espacios en los cuales las figuras pueden ser movidas sin que cambien en forma y magnitud. El concepto de curvatura que usó Riemann era una generalizacion de un concepto similar usado por Gauss para las superficies.

Las geometrías no euclidianas que más interés suscitaron después de Riemann fueron las de curvatura constante. Este concepto no lo vamos a definir aquí, pero sí a señalar su trascendencia. El mismo Riemann había sugerido en 1854 que un espacio de curvatura constante positiva en dos dimensiones se podía realizar en la superficie de una esfera, en la cual las geodésicas se tomaran como las rectas.

Este tipo de geometría se llama una geometría doble elíptica. (A veces se conoce simplemente por elíptica).

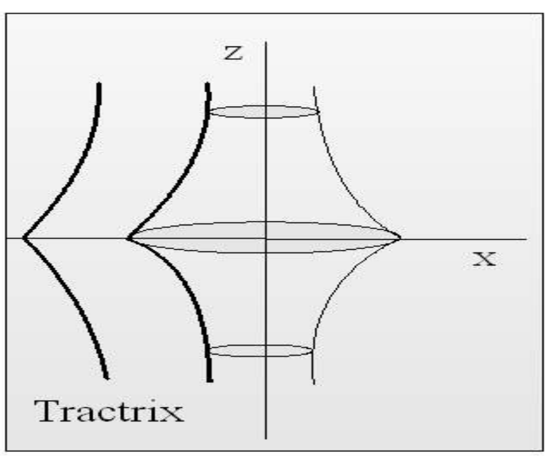
Entonces: la geometría esférica que luego veremos con cierto detalle es un modelo de geometría no euclidiana que se llama doble elíptica.

La geometría de Gauss, Lobachevsky y Bolyai fue llamada por el alemán Felix Klein como geometría hiperbólica.

La pseudoesfera

En 1868, Beltrami acabó con el asunto de la prueba del quinto postulado: probó que una prueba no era posible. Probó esto demostrando que la geometría no euclidiana es igualmente consistente que la geometría euclidiana (es decir sin contradicciones lógicas internas).

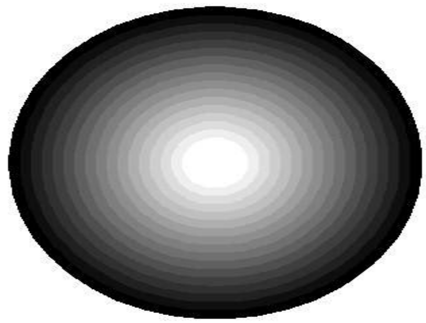
Para lograr su prueba creó un modelo de estas últimas (para un pedazo de su plano) que se llama la pseudoesfera. Este modelo sale de rotar una curva llamada tractrix alrededor de su asíntota: Y da algo parecido a lo siguiente:



Pseudoesfera de Beltrami

La esfera

El matemático Heinrich Liebmann (1874-1939) probó que la esfera es la única superficie cerrada analítica (sin singularidades) de curvatura positiva constante. Es la única que puede ser usada como un modelo euclidiano para la geometría doble elíptica.



La esfera como modelo de la geometría doble elíptica

El desarrollo de estos modelos ayudó a los matemáticos a darle cierto sentido a las nuevas geometrías. Pero en esa época todavía faltaban otros resultados matemáticos que permitieran comprender con cabalidad las geometrías no euclidianas.

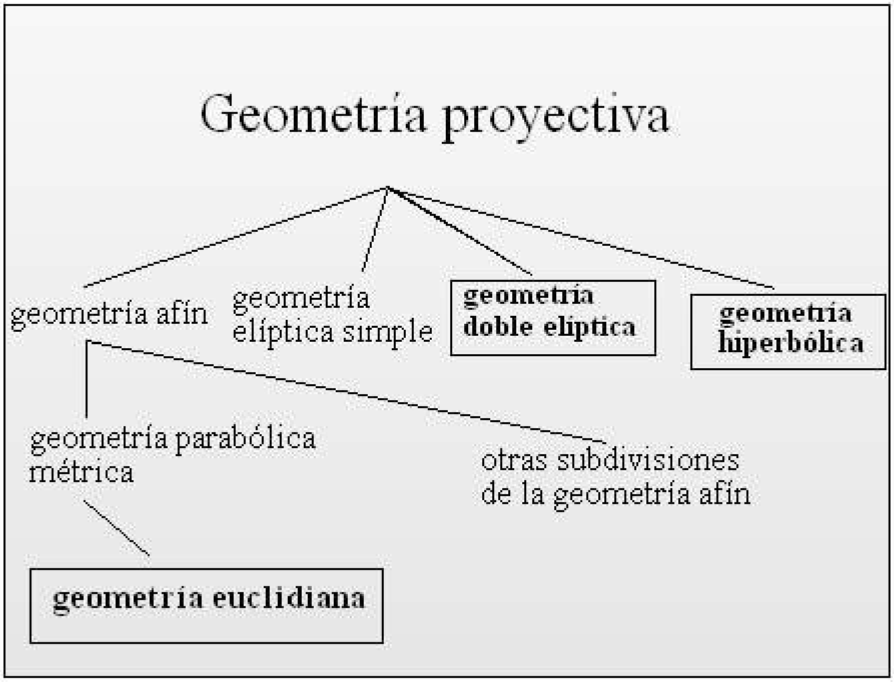
Dentro de la geometría proyectiva

Probablemente el resultado que más influyó en esa dirección fue la conexión que se desarrolló entre la geometría euclidiana y la geometría proyectiva.

Los matemáticos lograron demostrar que la proyectiva era más general; es decir, por ejemplo, que la euclidiana era un caso de la proyectiva.

De igual manera Felix Klein (1849-1925) fue más lejos. Hizo ver que la geometría hiperbólica y la doble elíptica podían englobarse dentro de la geometría proyectiva.

Un esquema de la clasificación de Klein puede ser el siguiente (algunas de las geometrías mencionadas no las vamos a explicar en este libro).



Clasificación de algunas geometrías según Klein

La aplicación de las nuevas geometrías

Aunque Gauss, Bolyai y Lobachevsky creyeron en la aplicabilidad física de sus nuevas geometrías, los matemáticos siguientes no pensaron igual. Incluso Cayley, Klein y Poincaré no visualizaron aplicaciones. Klein, por ejemplo, pensaba que el espacio fundamental era el euclidiano y las otras geometrías eran otras formas de geometría euclidiana con algunas variaciones (con nuevas funciones de distancia). Poincaré a lo único que llegaba es a decir que la geometría euclidiana era la más conveniente. Con la emersión de la teoría de la relatividad por Einstein todas estas valoraciones del papel, importancia y lugar de las geometrías no euclidianas y, por ende, de la euclidiana, tuvieron que cambiar drásticamente.

5.3 PREGUNTAS

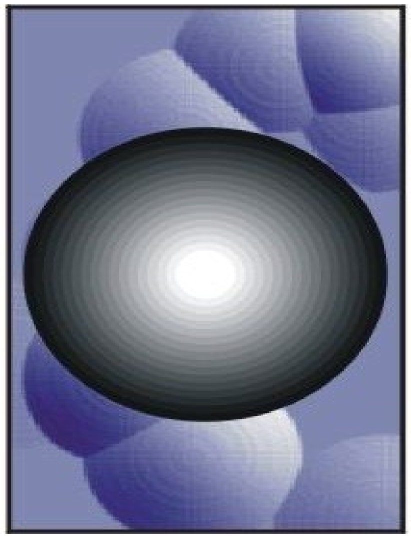
Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Quién formuló por primera vez el nombre de "geometría diferencial"?
2. ¿Quién fue el primer matemático que dijo que una superfice se podía ver como un espacio en sí mismo?
3. ¿Hacia qué teoría condujo la asociación que hacían Clifford y Riemann entre espacio y materia?
4. ¿Cómo se llama la geometría desarrollada por Gauss, Lobachevsky y Bolyai?

   En los siguientes ejercicios diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.

5. Para Riemann la geometría euclidiana era empírica.
6. Según la geometría de Riemann es posible estudiar el espacio como un todo.
7. Eugenio Beltrami fue quien definitivamente zanjó la discusión en torno a la validez del quinto postulado de Euclides.
8. La geometría euclidiana es más general que la geometría proyectiva.
9. Para Poincaré la geometría no euclidiana era la más conveniente para describir la realidad.

Capítulo VI: Sobre la esfera



En los pasados capítulos hemos hecho un recorrido breve alrededor de la historia de la geometría no euclidiana. No hemos intentado visualizar ningún modelo físico de ellas. En este capítulo es esto último lo que pretendemos, aunque siempre de una manera muy introductoria y si si quiere informal. Nos interesa aquí, entonces, hacer una representación física de lo que puede ser una geometría no euclidiana, para que en particular se aprecie bien la utilidad de las mismas.

Una de las representaciones más interesantes y atractivas es la que se puede lograr por medio de una esfera. Para que usted se ubique en el tema, considere una bola de fútbol o un globo terráqueo y trate de trazar una longitud entre los polos con una cinta métrica. Trace también una longitud entre dos puntos que no están en los polos:

 **Medida en los polos**	 **Medida fuera de los polos**

- ¿Cuántas trayectorias podría usar usted en el caso del globo y cuántas en el de la bola?

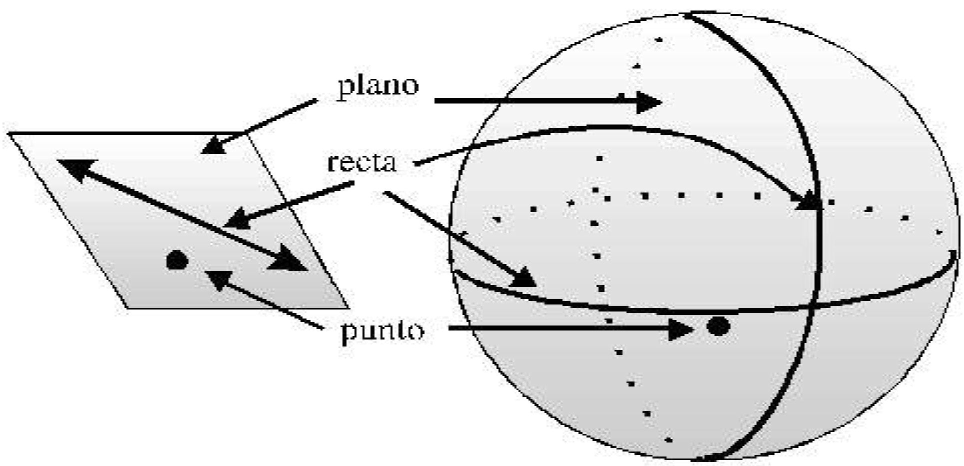
6.1 GEOMETRÍA ESFÉRICA

Llamamos con los términos geometría esférica el estudio de las propiedades de rectas, puntos, segmentos, y todas las figuras geometrícas puestas en la superficie de una esfera. Esta constituye un modelo o ejemplo de geometría no euclidiana. Es decir: la geometría esférica es una geometría diferente a la clásica euclidiana pero que tiene perfecta validez.

En ella el plano es la superficie de una esfera.

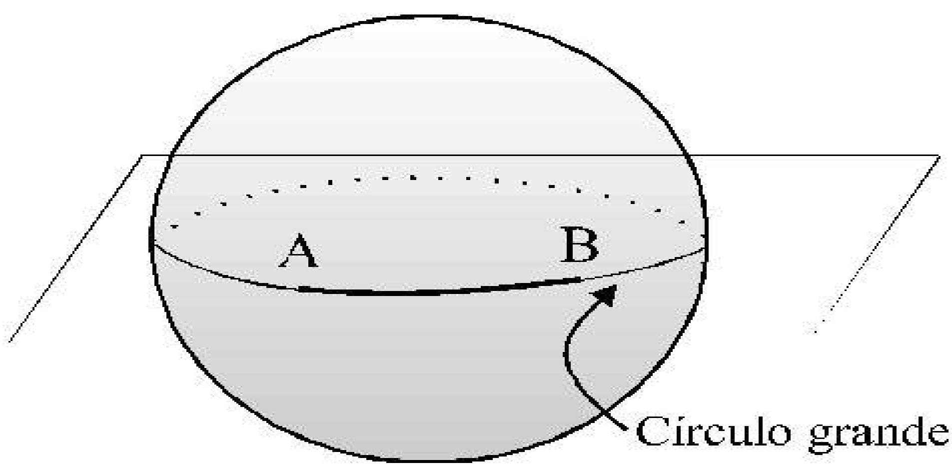
Los puntos son iguales que en la euclidiana pero las rectas son los círculos grandes, aquellos que pasan por dos puntos opuestos (también se llaman geodésicas).

Vea la figura siguiente:



En el plano y en la esfera

La distancia más corta entre dos puntos no es el segmento sino el arco de un círculo grande.



El segmento $\overline{AB}$ es un arco.

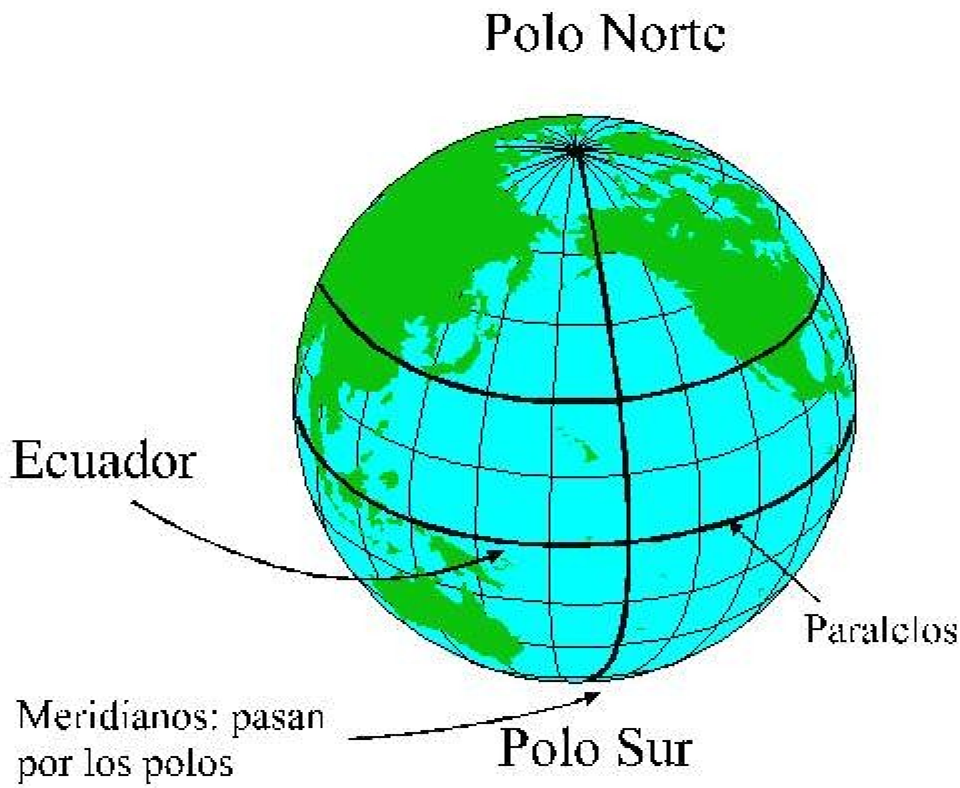
Aplicaciones

La aplicación de esta geometría en la realidad es mucha.

Consideremos por ejemplo el globo terráqueo.

En el dibujo al final mostramos las líneas de longitud y las líneas de latitud que se usan para definir la posición en nuestro planeta.

Como se puede ver las líneas que unen los polos son todas círculos grandes, mientras que entre las líneas de latitud solo el Ecuador es un círculo grande.

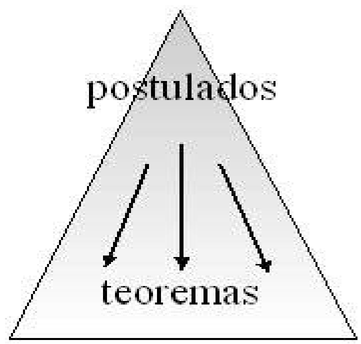


Paralelos y meridianos en el globo terráqueo .

6.2 SEMEJANZAS Y DIFERENCIAS

Como hemos visto, varios postulados constituyen la base de la geometría sistematizada por Euclides. Los postulados suelen plantearse como verdades autoevidentes, es decir que su verdad nos parece más o menos obvia.

Otra característica de los postulados es que éstos no pueden ser deducidos de otros postulados. Es decir: los postulados son evidentes en sí mismos y además elementos primarios (base de todos los demás resultados).

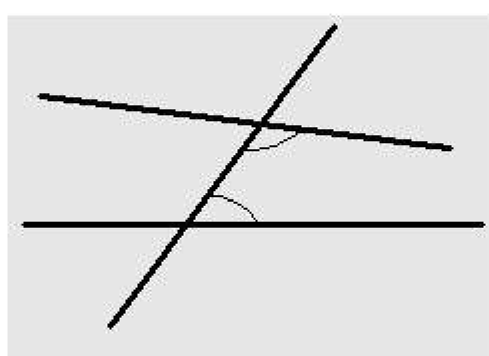


La pirámide axiomática

El quinto postulado

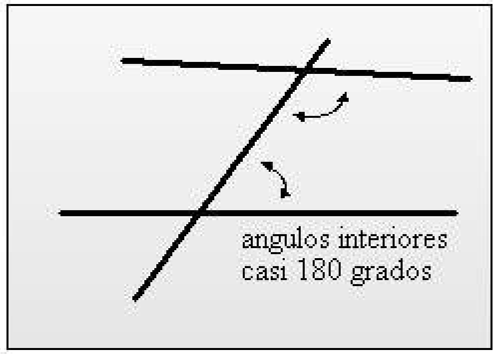
El postulado euclidiano más famoso y controversial, como estudiamos antes, fue el quinto. Recordemos su enunciado:

Dadas dos rectas en un plano y una tercera recta que las corta: si la suma de los ángulos interiores de un lado es menor que dos ángulos rectos, entonces las rectas, si se extienden suficientemente, se cortarán en el lado en el cual la suma de los ángulos es menor que dos ángulos rectos.



El quinto postulado de Euclides

Observe bien nuestro dibujo. Note que si usted extiende las rectas hacia la derecha rápidamente se cortarían en el lado derecho de la página. Usted, sin embargo, podría preguntar ¿qué pasaría si cambiamos las rectas y éstas se cortan en un punto que estuviera fuera de esta hoja?



Casi paralelas

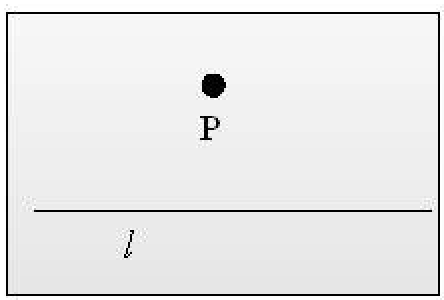
Bueno, la respuesta es fácil: use una hoja más grande.

Pero, usted insiste ¿qué pasaría si los ángulos internos a la derecha suman digamos 179, 99999 grados, es decir rectas casi paralelas? ¿dónde se cortan las rectas? Sin duda tendría que conseguir un papel muchísimo más grande.

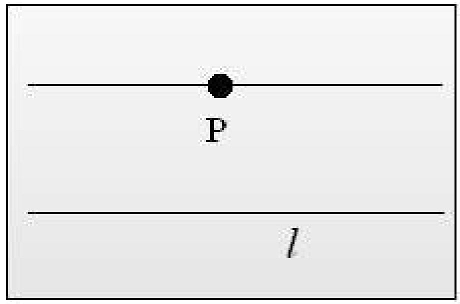
¿Y si seguimos poniendo 9's a 179, 99999 grados...? Aquí hay un problema. ¿Cuál? ¿ Cómo lo describiría usted?

Este postulado, como usted ya sabe, se suele llamar como Postulado de las Paralelas por el equivalente postulado dado por el matemático y físico escocés John Playfair (1748-1819):

Por un punto dado externo a una recta dada solo puede pasar a lo sumo una recta paralela a la recta dada.



Un punto exterior a una recta

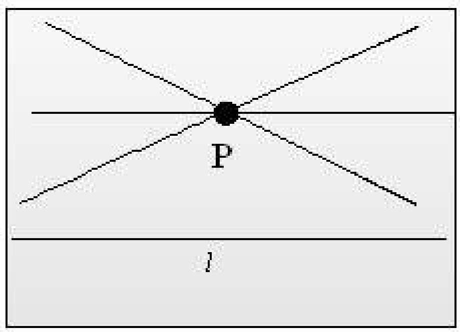


Postulado de las paralelas

Dos tipos de geometría

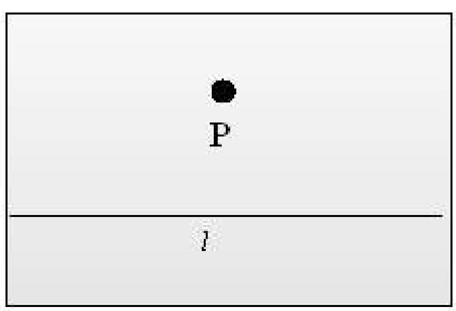
Como sabemos, la negación lógica del quinto postulado nos da dos proposiciones diferentes

1. Dado un punto exterior a una recta dada, pasan más de una recta paralela a la recta dada.



Varias paralelas

2. Dado un punto exterior a una recta dada, no pasa ninguna recta paralela a la recta dada.

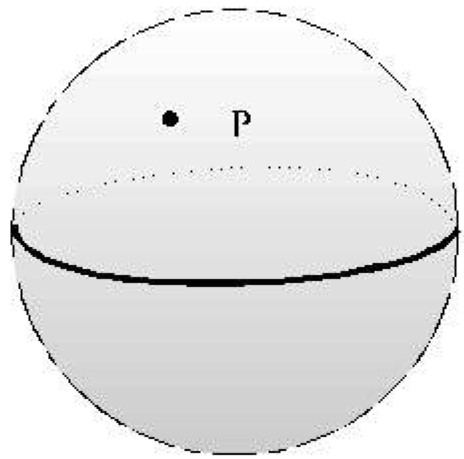


Ninguna paralela

Cada una de estas suposiciones dio origen a geometrías distintas.

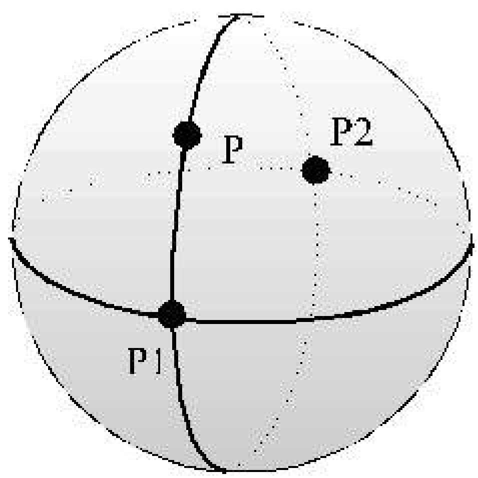
En la geometría esférica

Dos círculos grandes distintos (la rectas esféricas) c_1 y c_2 siempre poseen dos puntos de intersección. Haga un dibujo para representar esta situación.



Ahora considere una recta (esférica), es decir un círculo grande c_1 y un punto externo P.

Por lo anterior, cualquier recta c_2 que pase por P interseca a c_1 en dos puntos.



La conclusión es:

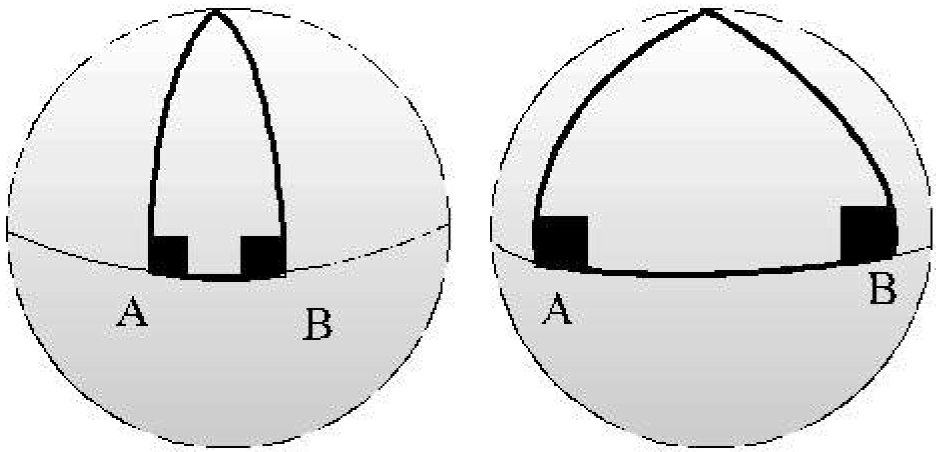
Dados una recta c_1 y un punto P fuera de ella, no existe una recta c_2 paralela a c_1 que pase por P.

Angulos de un triángulo

La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados. También: esa suma varía dependiendo del área del triángulo.

La realidad es que conforme se hace más pequeño el área del triángulo, la suma de sus ángulos aunque mayor que 180 grados se acerca cada vez más a los 180 grados.

Veamos un ejemplo gráfico de cómo sucede:



Por la construcción usted puede ver que los ángulos en A y B son rectos y, entonces, la suma de los tres ángulos es mayor que 180 grados.

Dados P y P_1 pueden pasar un círculo grande que los contuviera o, en el caso de ser P y P_1 opuestos, muchos círculos grandes. La conclusión es que dados dos puntos P y P_1 existe por lo menos una recta (esférica) C que los contiene.

6.3 PREGUNTAS

Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Explique con sus palabras qué es la geometría que en este libro hemos llamado esférica?
2. En un cilindro ¿cuánto suman los ángulos de un triángulo?
3. ¿Cuáles son las rectas de la geometría esférica?
4. ¿Es un arco la distancia más corta entre dos puntos en la geometría esférica? Explique su respuesta por escrito.
5. Mencione un ejemplo de aplicación de la geometría esférica.
6. De dos características de los postulados en geometría.

   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta. Puede usar un diagrama para mostrar su punto de vista.

7. En la geometría esférica, dos rectas distintas se intersecan en dos puntos.
8. En la geometría euclidiana, dados dos puntos existe por lo menos una recta que los contenga.
9. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor de 180 grados.
10. Dos rectas esféricas se intersecan en 2 puntos.
11. Dados una recta esférica $c1$ y un punto P, existe solo una recta perpendicular a l que pasa por P.

Capítulo VII: Otros modelos geométricos

Como hemos visto, en la geometría esférica no pasa una paralela por un punto exterior a una recta. Esta geometría sobre la superficie de una esfera constituye lo que llamamos un modelo o una representación de algo que se llama la geometría doble elíptica, planteada por el gran matemático alemán Bernhard Riemann en el siglo XIX.

Antes vimos que si no se asume el quinto postulado de Euclides es posible asumir dos postulados contrarios. Ya vimos uno de ellos.

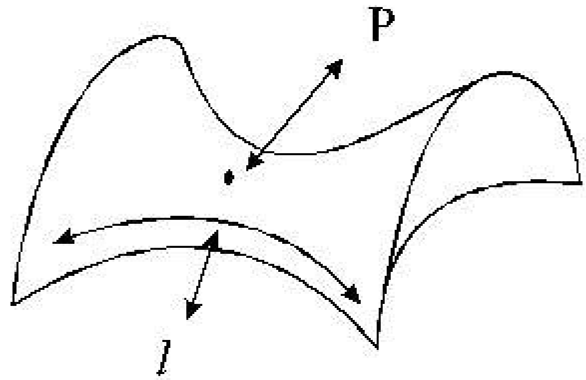
Si asumimos el otro posible criterio, es decir si por un punto exterior a una recta dada pasan más de una recta paralela, estaremos en lo que se llama geometría hiperbólica.

Como precisamos antes, fueron los grandes matemáticos Gauss, Lobachevsky y János Bolyai quienes construyeron este tipo de geometría.

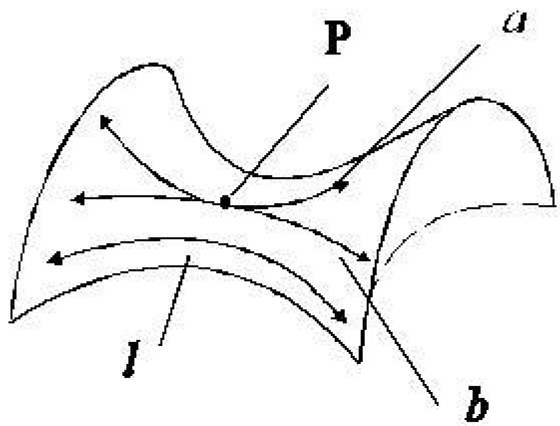
Para conseguir un modelo (un ejemplo) de geometría hiperbólica las cosas no son tan fáciles. La primera aproximación que vamos a hacer es a través de una silla de montar .

7.1 EN UNA SILLA DE MONTAR

Esta geometría se puede representar como si el plano fuera una silla de montar a caballo. Recuerde la forma de ese tipo de sillas. Consideremos en este plano una recta l y un punto P fuera de ella.



Usted puede fácilmente observar que existe más de una paralela que pasa por P.



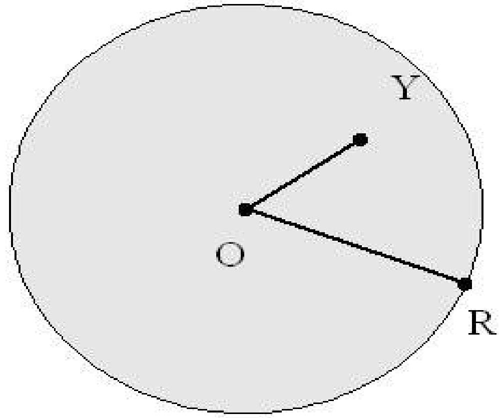
En el dibujo anterior vea cómo dados la recta l y el punto P, existen rectas a y b que pasan por P y son paralelas a l.

7.2 DENTRO DE UN DISCO

Ahora vamos a ver otra representación de la geometría hiperbólica. Le vamos a llamar el modelo de **Beltrami-Klein** porque fue planteado por los matemáticos Eugenio Beltrami (italiano) y Felix Klein (alemán).

- Dibujemos un círculo c en el plano euclidiano normal.
- Llamemos O al centro del círculo.
- Si R es un punto en la circunferencia entonces $\overline{OR}$ es el radio.

Vea la figura siguiente:

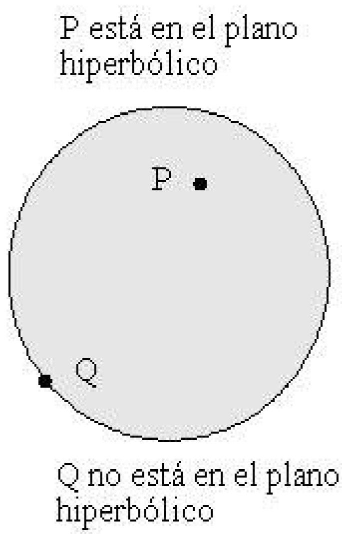


Interior del círculo

Como usted sabe muy bien, el interior de C consiste de todos los puntos Y tales que $OY \lneqq OR.$

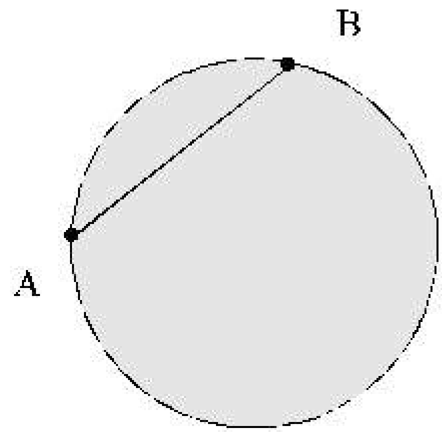
Ahora sí, aquí está la definición:

Los puntos del interior del círculo representan los puntos del nuevo plano hiperbólico.



Note que los puntos de la circunferencia no son parte de este plano hiperbólico.

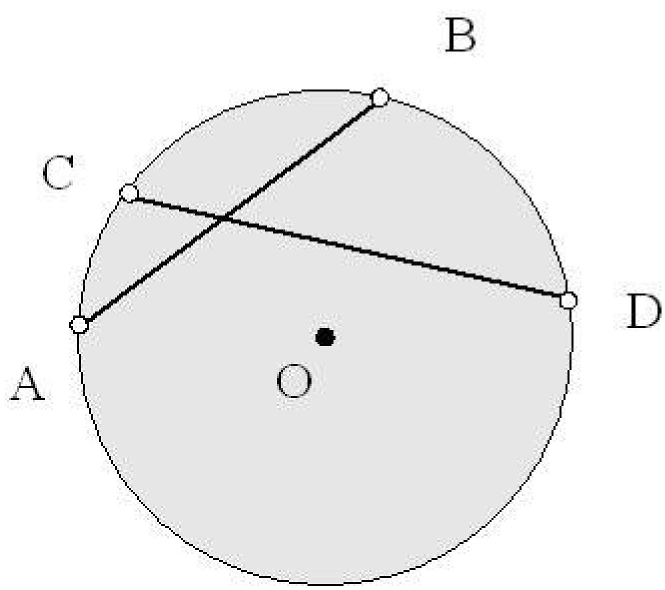
Sigamos:



Una cuerda es un segmento que conecta dos puntos A y B que están en la circunferencia.

Este segmento sin los puntos terminales se llama cuerda abierta.

Se denota $A)(B$. Vea la figura:



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas abiertas

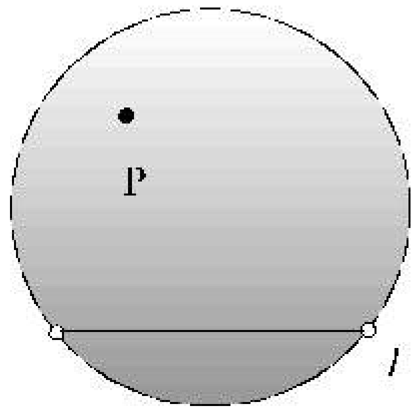
Entonces:

Una recta en este modelo es una cuerda abierta.

Es decir: las cuerdas abiertas son las rectas de este plano.

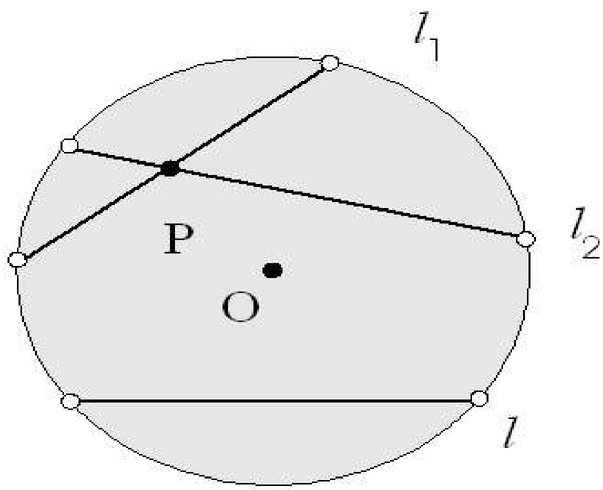
El punto P está en $A)(B$ quiere decir que P está en la recta euclídea $\overleftrightarrow{AB}$ y que P está entre A y B
.

Llegamos a un punto clave. Consideremos el punto P y la recta l.



Podemos trazar dos rectas paralelas l_1 y l_2 que pasan por P y ambas son paralelas a la cuerda abierta l.

La figura siguiente evidencia nuestra anterior afirmación:

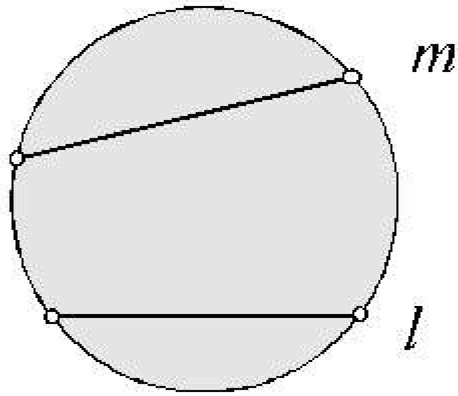


Bueno, usted se habrá preguntado ¿cuál es la definición de paralelismo para que las cosas funcionen así?

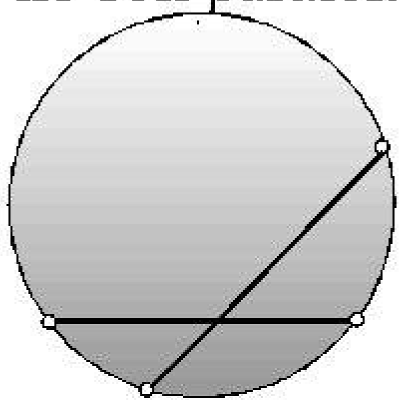
Aquí la definición de dos rectas paralelas es que no posean un punto en común.

Es decir: dos cuerdas abiertas son paralelas si no poseen puntos en común.

l y m son paralelas

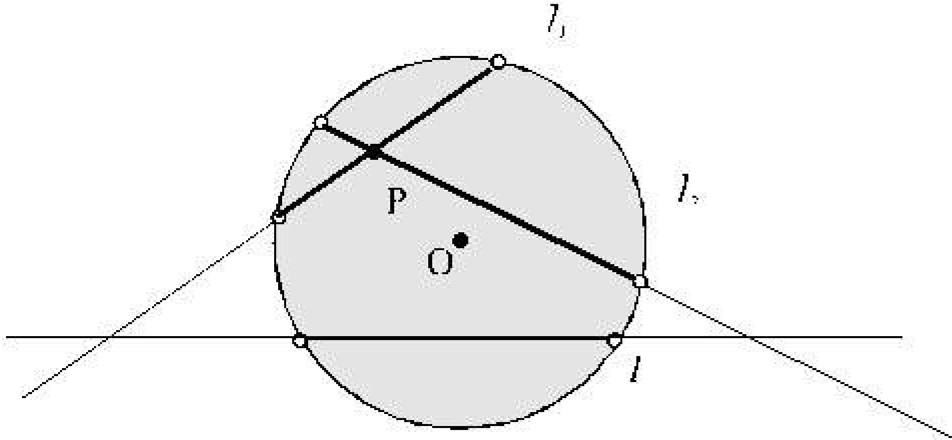


l y m no son paralelas



Note que no importa que al extender l_1 y l_2 éstas corten a la extensión de l.

El plano hiperbólico no sigue fuera del círculo c.



7.3 OTRO MODELO

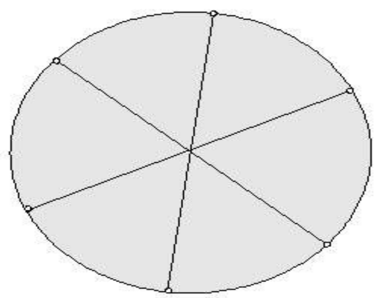
Otro modelo de geometría hiperbólica es lo que se suele llamar el disco de Poincaré, en honor a un matemático francés de finales del siglo XIX y principios del siglo XX (de hecho, Poincaré creó dos modelos de geometría hiperbólica). Es parecido al anterior de Beltrami-Klein.

Se toma, también, como plano al conjunto de los puntos del interior de un círculo c.

Sin embargo las rectas se definen de manera diferente.

En primer lugar:

todos los diámetros son rectas.

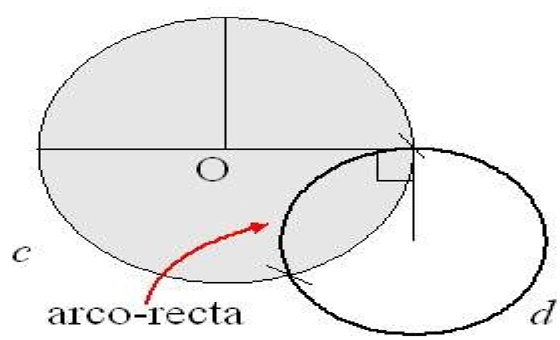


Los diámetros son rectas

Otras rectas se definen de la siguiente manera:

Dado el círculo c constrúyase un círculo d que sea ortogonal a c.

Es decir que en sus puntos de intersección, sus respectivos radios sean perpendiculares. Esto lo podemos visualizar así:

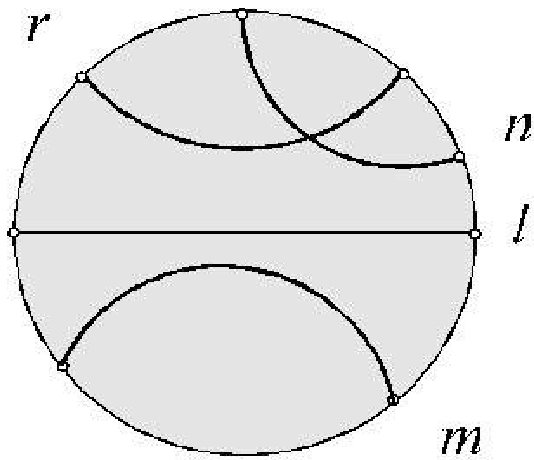


Círculos que se cortan ortogonalmente

El arco del círculo d que está dentro del interior de c representa una recta del plano de Poincaré.

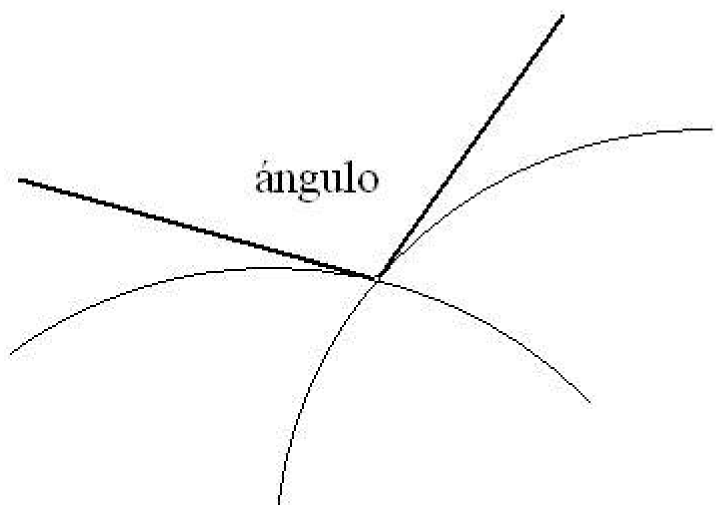
Debe recordar siempre que el plano hiperbólico no incluye los puntos en la circunferencia de c. Entonces:

Los diámetros de c y estos arcos así construidos son las rectas del plano de Poincaré.

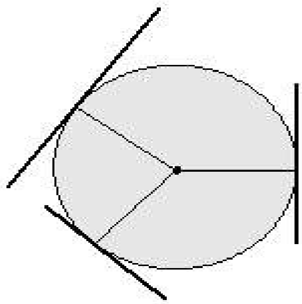
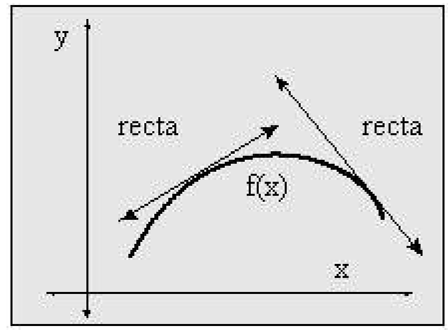


Un detalle: las longitudes se distorsionan cerca de la frontera (circunferencia) para hacerla inalcanzable.

Para que se tenga una idea mayor, veamos como se encontraría un ángulo:

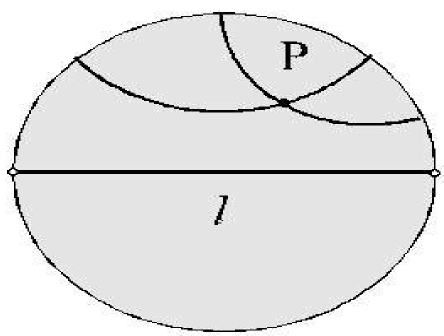


El ángulo se mide a partir de las rectas tangentes (euclidianas) a las curvas en el punto de intersección.

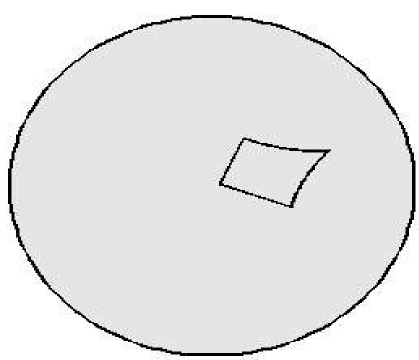
 **Rectas tangentes a un círculo**	 **Rectas tangentes a una función** f

Ahora usted puede darse cuenta que existe un número infinito de rectas paralelas a una recta l y que pasan por un punto externo P.

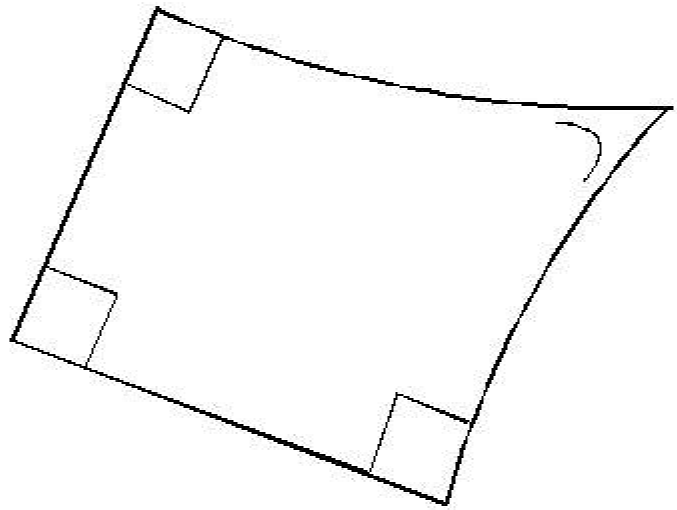
En la figura siguiente construimos 2 rectas paralelas a l (que no poseen puntos en común con l) y que pasan por P.



Vamos a representar un cuadrilátero en este modelo:



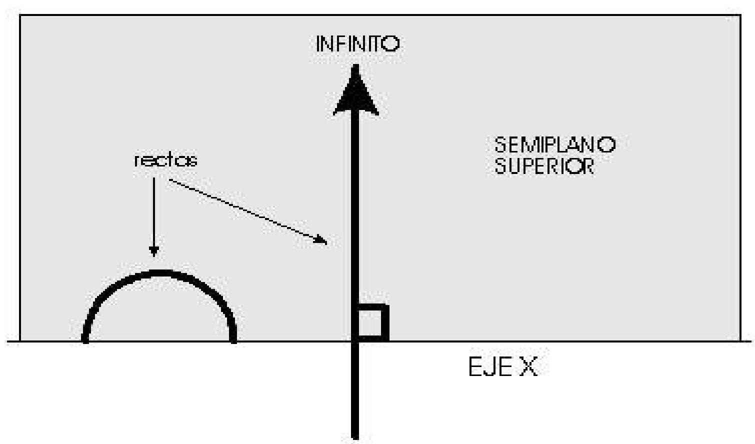
Note que uno de los vértices es el centro del disco. Si lo ampliamos nos queda así:



Observe que este cuadrilátero posee 3 ángulos rectos y uno agudo. Este tipo de cuadriláteros fue planteado por el matemático suizo Lambert en el siglo XVIII. Como ha podido notar, al cambiar algunas reglas del juego geométrico, toda la geometría común se trastoca. Es un nuevo juego aunque participen algunas características similares.

7.4 EL OTRO MODELO DE POINCARÉ

Para ofrecer una pincelada del otro modelo de Poincaré, vamos a mencionar lo básico: Este plano hiperbólico viene representado por los puntos de uno de los semiplanos determinados por una recta euclídea fija. Considere la figura siguiente, en la cual tomamos el semiplano determinado por el eje x:



Las rectas se repreentan por 2 formas:

a) como rayos que emanan de puntos sobre el eje x y perpendiculares al eje x;

b) como semicírculos en la aprte superior del semiplano cuyo centro descansa sobre el eje x.

Las nociones de "estar entre" e "incidencia" son las euclídeas.

Un comentario final: los tres últimos modelos no son tan diferentes; en realidad se puede establecer una correspondencia unívoca (es decir, uno a uno) entre los puntos y rectas de un modelo y los correspondientes de otro, de tal manera que se preserve la "incidencia", la relación "estar entre" y la "congruencia".

7.5 PREGUNTAS

Conteste las siguientes preguntas.

1. Enuncie el postulado contrario al de las paralelas que sirve de base para la geometría hiperbólica.
2. Mencione el nombre de los tres creadores de la geometría hiperbólica.
3. Si tomamos el plano como una silla montar ¿cuántas rectas paralelas a una recta dada l pasan por P, un punto externo a l?
4. ¿Cuáles son las rectas del modelo de Beltrami-Klein?
5. Explique por escrito qué son dos rectas paralelas en el modelo de Beltrami-Klein.
6. En el disco de Poincaré, ¿dónde están sus puntos?
7. En este disco de Poincaré, ¿cuántos tipos de rectas existen?. Explique.

   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta. Puede usar un diagrama para mostrar su punto de vista.

8. En una silla de montar, la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados.
9. En el modelo de Beltrami-Klein, se puede trazar un segmento que una dos puntos de la circunferencia.
10. Las rectas del disco de Klein son las cuerdas.
11. En el modelo de Poincaré, los diámetros son rectas.
12. Por un punto exterior a una recta dada, en el modelo de Poincaré no pasan rectas paralelas.

Capítulo VIII: Algunas lecciones

Las geometrías no euclidianas engendran modelos compatibles con el mundo real; es decir pueden servir para describir la realidad que nos rodea.

Con relación a eso el modelo de la esfera para la geometría riemanniana es muy evidente.

Con claridad vemos que las longitudes en nuestro planeta están sobre geodésicas que poseen curvatura.

Es más exacto pensar en términos de curvas que de rectas.

De hecho, otro ejemplo, los peritos topógrafos necesitan usar reglas geométricas diferentes a las euclidianas para realizar sus mediciones de terrenos que no son planos ni rectos.

El concepto de recta euclídea es una abstracción más que una realidad.

La pregunta que surge es ¿por qué en la historia de la humanidad surgió primero una geometría como la euclidiana y no, por ejemplo, una esférica?

8.1 LA CUERDA ESTIRADA

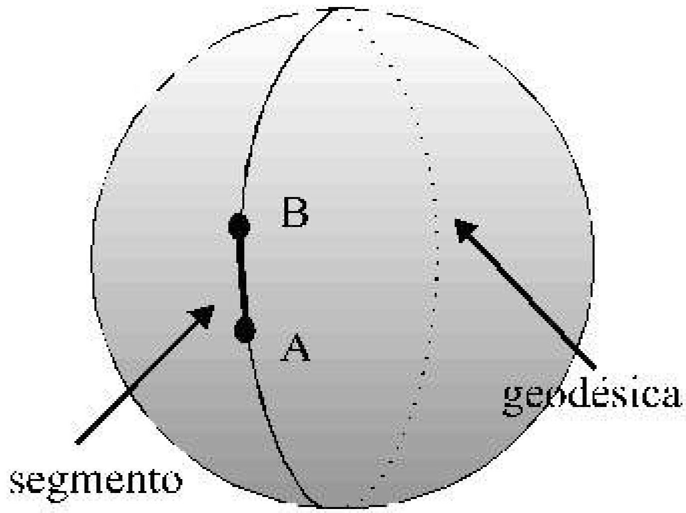
La respuesta está en que los griegos antiguos escogieron una cuerda estirada o el borde una regla como la línea recta física y con esa escogencia establecieron los axiomas euclídeos, base de toda su geometría.

Esta escogencia pareciera lo natural para seres vivientes que se mueven en superficies pequeñas.

Por ejemplo, no podemos apreciar la curvatura de las longitudes del planeta Tierra tan fácilmente.

De hecho, su carácter cuasiesférico tomó mucho tiempo para ser descubierto.

Si bien en los griegos antiguos se llegó a afirmar la redondez de la Tierra (probablemente, por la perfección atribuida a lo circular) e, incluso, que ésta giraba alrededor de un gran fuego central, durante siglos la visión dominante era que la Tierra era plana.



Una longitud terrestre es siempre una curva.

Newton y Einstein

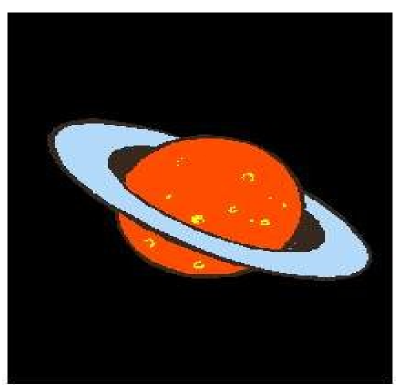
Para distancias físicas pequeñas la geometría euclidiana sirve.

Newton elaboró sus leyes con base en la geometría eucli-diana (y con los conceptos de espacio y tiempo absolutos e independientes).

Pero en el espacio esto ya no es así. Geometrías no eucli-dianas son las que sirven para explicar fenómenos estelares.

Los rayos de luz se toman como las líneas rectas de la geometría espacial. Pero los rayos de luz se distorsionan (se ``curvan'') por la acción gravitatoria de las masas planetarias.

El Sol, la Tierra, la Luna, Júpiter y otros astros distorsionan los rayos de luz.



La masa planetaria distorsiona los rayos de luz

Einstein usó una de estas geometrías (más compleja que las que hemos visto en este libro) para elaborar su teoría de la relatividad y explicar fenómenos estelares que el modelo de Newton no lograba describir bien.

Albert Einstein (1879-1955)

Un paradigma

Pero volvamos a la historia de la geometría. Una vez escogida la línea recta, todas las otras figuras geométricas se vieron condicionadas por esa escogencia. Entonces pasó lo que ya sabemos: una escogencia de lo que podemos llamar un paradigma (un modelo de ideas sobre la realidad) realizada socialmente, y con influencia de las limitaciones y ca-racterísticas de nuestra especie, definió una evolución cultural durante más de 2000 años.

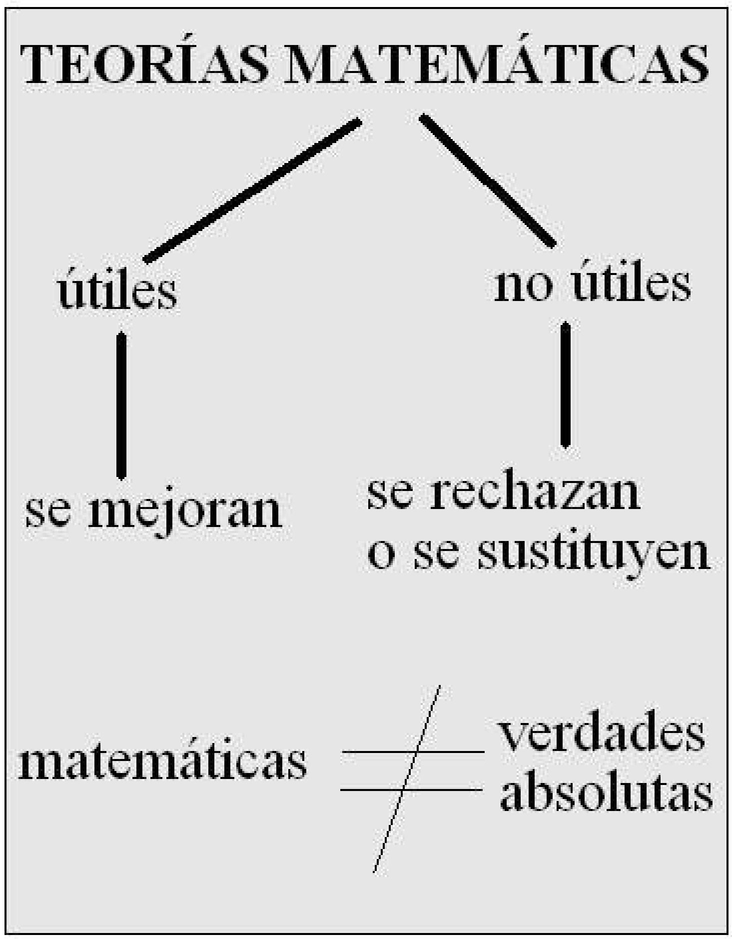
8.2 LECCIONES ÚTILES

La historia de la geometría no euclidiana deja muchas lecciones.

- Lo primero que las geometrías no euclidianas logran es cuestionar el estatus de la geometría euclidiana como u-na descripción de las propiedades geométricas del mundo que nos rodea. O, lo que es igual, establece nuevas teorías para e-sa descripción. En la génesis de la matemática, como en todas las ciencias, participan entonces las condiciones materiales, circunstancias sociales, y procesos de pensamiento.
- Durante todo el siglo XIX fueron muy pocos los matemáticos que pensaron que estas teorías eran aplicables a la realidad. Las vieron mayoritariamente como curiosidades lógicas, o derivables de la euclidiana de una u otra ma-nera.

- Las matemáticas no son colecciones de verdades sobre la realidad. Al igual que en todas la ciencias, las teorías de las matemáticas son descripciones aproximadas de nues-tro mundo.
- Las teorías se usan de acuerdo a su utilidad y capacidad para describir y explicar procesos de nuestro mundo. Si no sirven o no son adecuadas a esos propósitos otras teorías las sustituirán.
- Las teorías matemáticas son contruidas por individuos de carne y hueso en grupos y culturas humanas precisas. Estas trasmiten sus limitaciones, sus prejuicios, opiniones y capacidades, y condicionan las características y el destino de las teorías. Las comunidades matemáticas deciden sus criterios para aceptar la validez de sus teorías. Esos criterios son también históricos y sociales. Por eso a veces son unos y a veces otros.

A veces las comunidades se equivocan.



- Las geometrías no euclidianas demostraron que no hay teorías definitivas, absolutas, verdaderas para siempre, y que, entonces, la mejor actitud en el conocimiento (y en la vida) es la de respeto, apertura y flexibilidad para aceptar nuevas ideas o teorías.

8.3 PREGUNTAS

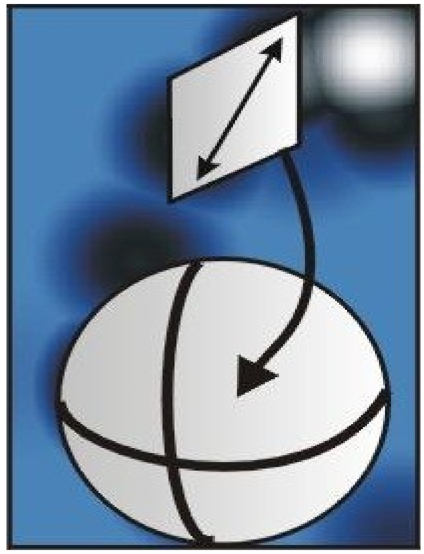
Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Por qué la gente pensaba que la Tierra es plana?
2. ¿Qué es un paradigma?
3. ¿Son las matemáticas colecciones de verdades absolutas? Explique.
4. ¿Qué le sucede a los rayos de luz en el espacio cuando pasan cerca de planetas?

   Diga si la proposición es falsa o verdadera. Justifique su respuesta.
5. Newton mejoró el modelo de la física de Einstein.
6. Las geometrías no euclidianas son mejores que la geo-me-tría euclidiana.
7. Comente

"Las teorías matemáticas son contruidas por indivi-duos de carne y hueso en grupos y culturas humanas precisas. Estas trasmiten sus limitaciones, sus prejuicios, opiniones y capacidades, y condicionan las características y el destino de las teorías. Las comunidades mate-má-ti-cas deciden sus criterios para aceptar la validez de sus teorías. Esos criterios son también históricos y sociales. Por eso a veces son unos y a veces otros. A veces las comunidades se equivocan."

BIBLIOGRAFIA



- Babini, José. Historia sucinta de la matemática. Madrid: Es-pasa-Calpe, S.A., 1969.
- Baron, Margaret E. The Origins of the Infinitesimal Calculus. Londres: Pergamon Press, 1969.
- Bell, E.T. Men of Mathematics. New York: Simon and Shuster, 1937.
- Bell, E.T. Development of Mathematics. New York: MacGraw Hill Book Co., 1940. Una versión también en inglés pero aumentada salió en 1945. Versión en español por el Fondo de Cultura Económica S. A.: México, 1949.
- Bell, E.T. Mathematics. Queen & Servant of Science. Washington D. C. : Mathematical Association of America, 1951. Otra edición por Tempus Books of Microsof Press: Redmond, Washington, 1987.
- Benacerraf, Paul y Putnam, Hilary (editores): Philosophy of Mathematics: Selected Readings. Cambridge University Press, 1983.
- Bernal, John D.. Science in History. Londres: C. A. Watts and Co. Ltd., 1954. Versión en español (traducción de Eli de Gortari) por la UNAM de México: México, 1972.
- Bochner. Salomon. The Role of Mathematics in the Rise of Science. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1966.
- Bolzano, Bernard. Las paradojas del infinito. México: UNAM (Colección MATHEMA), 1991. La primera versión de este trabajo fue publicada en alemán en Leipzig en 1851.
- Bonola, R. Non-Euclidean Geometry. New York: Dover, 1955.
- Bourbaki, Nicolás. Elements d'Histoire des mathematiques. París: Hermann, 1960. Edición en español por Alianza Editorial: Madrid, 1972.

- Boyer, Carl B. The Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover, 1959.
- Boyer, Carl B. A History of Mathematics. John Wiley and Sons, 1968. Posee una traducción al español por Alianza Editorial: Madrid, 1986.
- Campbell, Douglas y Higgins, John C.. Mathematics: People, problems, Results. Belmont, California, EUA:Wadswoth, Inc., 1984.
- Cohen, I. Bernard. Revolution in Science. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1985.
- Coxeter, H. S. M., Introducción a la Geometría, México: Limusa--Wiley, 1971.
- Fauvel, J. y Gray, J. (editores) The History of Mathematics: A Reader, Milton Keynes, Reino Unido: Open University, 1987.
- Gauss, Carl Friedrich. Disquisitiones Arithmeticae. Versión española publicada por la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales: Bogotá, 1995, y realizada por Angel Ruiz, Hugo Barrantes, y Michael Josephy de la Universidad de Costa Rica.
- Gillies, Donald (editor). Revolutions in Mathematics. Oxford: Clarendon Press Oxford, 1992.
- Greemberg, Marvin Jay. Euclidean and non-Euclidean Geometries. New York: W.H. Freeman and Company, 1974. (Primera edición en 1972).
- Hartshorne, R., Companion to Euclid: A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.
- Heath, T. L.: A History of Greek Mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1921.
- Heath, T. L. Euclid`s Elements. New York: Dover, 1956.
- Hull, L. W. H. History and Philosophy of Science. Messr. Longmans, Green and Co. Ltd., 1959. Versión en español por Seix Barral: Barcelona, 1962.
- Kline, Morris. Mathematics in Western Culture. New York: Oxford 1953.
- Kline, Morris. Mathematics for the Nonmathematician. New York: Dover, 1985. La primera edición apareció como Mathematics for liberal arts. Reading, Mass., EUA: Addison Wesley, 1967.
- Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972.
- Kline, Morris. Mathematics. The Loss of Certainty. New York: Oxford University Press, 1980.
- Kline, Morris. Mathematics and the search for Knowledge. New York: Oxford University Press, 1985.
- Kneale, William y Martha. The Development of Logic. Oxford: Clarendon Press, 1962. Versión en español de Editorial Tecnos: Madrid, 1972.

- Kramer, Edna. The Nature and Growth of Modern Mathematics. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1981.
- Klein, F. Geometry, parte 2 del libro Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. New York: Dover, 1948.
- Knorr, Wilbur R.. The ancient tradition of geometric problems. Boston: Birkhäuser, 1986. Otra edición por Dover: New York, 1993.
- Lakatos, Imre. Mathematics, Science and Epistemology Philosophical Papers. Volume 2. Londres: Cambridge University Press, 1978. La versión en español es de Alianza Editorial: Madrid, 1983.
- Newman, James (editor). The World of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1956. Edición en español por Ediciones Grijalbo S. A.: Barcelona, 1969.
- Poincaré, H. Science and Hypothesis. New York: Dover, 1952.
- Polyá, G. How to solve it. A New Aspect of Mathematical Method. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1945.
- Ruiz, Angel. "Sobre la revolución científica y matemática en el siglo XVII", en el libro editado por A. Ruiz: Las Matemáticas en Costa Rica (Memorias "Tercer Congreso Nacional de Matemáticas"), Octubre 1990, San José, Costa Rica.
- Ruiz, Angel. "Polémicas de método en la historia de la ciencia y las matemáticas", en el libro editado por A. Ruiz : Las Matemáticas en Costa Rica (Memorias "Tercer Congreso Nacional de Matemáticas"), Octubre 1990, San José, Costa Rica.
- Ruiz, Angel. Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1990.
- Ruiz, Angel. "Los orígenes de la Revolución Científica", Elementos, N.14, Año 4, Vol. 2, julio setiembre 1990, Univ. Autónoma de Puebla, Puebla, México.
- Ruiz, Angel. Ocaso de una utopía. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1993.
- Ruiz, Angel. "Tecnología y humanismo". Panorama de un mundo cambiante. Cátedra de Historia de la Cultura, Estudios Generales, Univ. C.R., agosto 1994.
- Ruiz, Angel, y Barrantes, Hugo. Elementos de Cálculo Diferencial (2 volúmenes), San José, Costa Rica: Edit. Univ. CR, 1997.
- Ruiz, Angel, y Barrantes, Hugo. Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos, San José, Costa Rica: Edit. Univ. CR, 1997.
- Smith, D. E. History of Mathematics. Boston: Ginn, 1923. También en Dover: New York, 1958.
- Struik, D. J. A Concise History of Mathematics. New York: Dover, 1967.

- Struik, D. J. A Source Book in Mathematics 1200-1800. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969. Otra edición por Princeton University Press: Princeton, N. J., 1986.
- Taton, René (Editor). Histoire générale des sciences. París: Presses Universitaires de France, 1957-1961, 5 volúmenes.
- Tsijli, Th., Geometría Euclídea I, San José: Editorial de la UNED, 1994.
- Várilly, J. C., Elementos de Geometría Plana. San José: Editorial de la UCR, 1988.
- Yaglom, I. M., Geometric Transformations III, New York: Random House, 1973.